МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

Г.М.ВЕЛИКІНА, Л.В.КАРМАНОВА, О.В.БУГРИМ

ПОДВІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ

Навчальний посібник

ДНІПРО
НГУ
2018

УДК 517.37
В 27

Рекомендовано вченою радою університету як навчальний посібник (протокол № 3 від 26.02.2018 р).

Рецензенти:

С.О.Пічугов – д-р фіз.-мат. наук, професор, зав. кафедри прикладної математики Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту.

Т.С. Кагадій – д-р фіз.-мат наук, професор кафедри вищої математики Державного ВНЗ "НГУ".

Великіна Г.М.Подвійний інтеграл: навч. посіб. / Г.М.Великіна, Л.В.Карманова,

О.В.Бугрим; М-во освіти і науки України, Нац. гірн. ун-т. – Дніпро: НГУ, 2018. – 53 с.

Навчальний посібник містить основні теоретичні положення стосовно розділу "Подвійний інтеграл" курсу вищої математики. Дано вичерпний аналіз областям інтегрування. Розглянуто застосування подвійного інтеграла до розв'язку задач з геометрії, механіки та фізики. Наведено вичерпні розв'язки достатньої кількості типових задач. Містить питання для самоперевірки і 200 задач для самостійної роботи. Наведено довідковий матеріал з основних видів геометричних поверхонь другого порядку. Орієнтований на організацію системної підготовки та самопідготовки.

Розраховано на студентів перших та других курсів всіх спеціальностей технічних вищих навчальних закладів денної, вечірньої, заочної та дистанційної форм навчання.

УДК 517.37

Навчальне видання

Великіна Галина Миколаївна
Карманова Лілія Валентинівна
Бугрим Ольга Володимирівна

Подвійний інтеграл

Навчальний посібник

Видано в редакції авторів

Підписано до друку 15.03.2018. Формат 30х42/4.
Папір офсетний. Ризографія. Ум. друк. арк. 2,8.
Обл.-вид. арк. 8,5. Тираж 30 прим. Зам. № .

Підготовлено до друку та надруковано
у Державному ВНЗ «Національний гірничий університет»
49005, м. Дніпро, просп. Дмитра Яворницького, 19.

ЗМІСТ

ВСТУП

Призначення цього навчального посібника − підвищення ефективності самостійної роботи студентів.

Мета посібника:

- допомогти студентам отримати базові знання з теорії подвійних інтегралів.
- дати студентам базові навички з обчислення подвійних інтегралів, а також навчити використовувати подвійні інтеграли для розв'язування прикладних задач з геометрії, фізики та механіки.

В навчальному посібнику досить змістовно проаналізовано низку типових завдань, орієнтуючись на які, студенти отримують можливість самостійно розв'язувати завдання з обчислення подвійних інтегралів.

Навчальний посібник містить понад двісті завдань, які складають такі підрозділи: зведення обчислення подвійних інтегралів до обчислення повторних інтегралів, зміна порядку інтегрування в повторних інтегралах, застосування подвійних інтегралів в задачах геометрії, фізики та механіки.

Посібник відповідає програмі курсу вищої математики для технічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

Навчальний посібник призначено для студентів перших і других курсів всіх спеціальностей технічних вищих навчальних закладів денної, вечірньої, заочної та дистанційної форм навчання.

§1. Множини і криві на площині

Будемо розглядати функції $z = f(x,y)$ з областю визначення D_f площини xOy. Така функція кожній точці $(x,y) \in D_f$ ставить у відповідність єдине дійсне число $z = f(x,y)$.

Введемо основні поняття, що характеризують плоску множину D.

1. Множина *D* на площині називається *обмеженою*, якщо вона цілком належить деякому кругу.

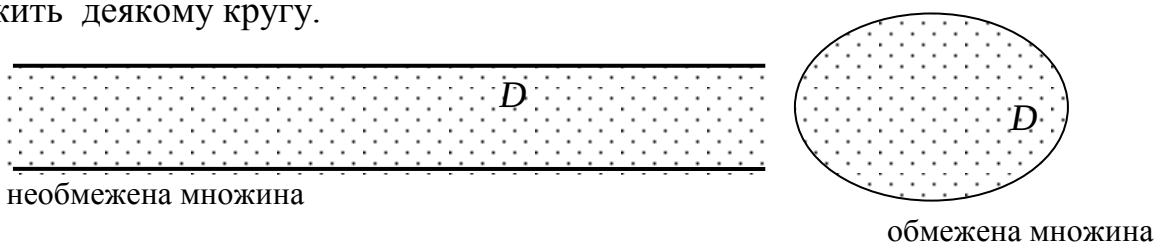


Рис.1

2. Діаметром обмеженої множини *D* називається найменше дійсне число *d* таке, що відстань між будь-якими двома точками множини *D* не перевищує *d*.

3. Круг разом з колом називається *замкненим* кругом:

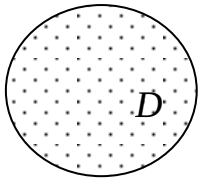


Рис.2

4. Круг без кола, що його оточує, називається *відкритим* кругом:

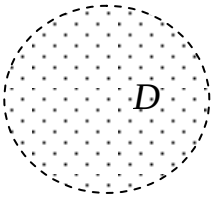


Рис.3

5. δ*-окілом* точки *M* на площині називається відкритий круг з центром в точці *M* і радіусом δ.

6. Точка *M* множини *D* називається *внутрішньою* точкою множини *D*, якщо вона належить множині *D* разом з деяким δ - окілом.

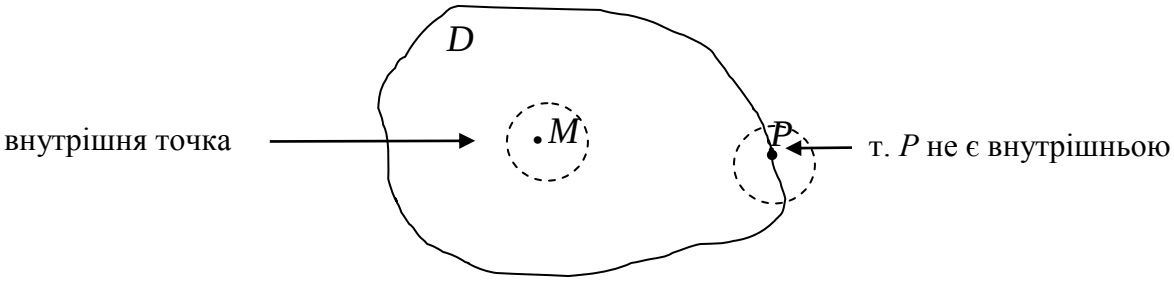


Рис. 4

7. Точка M (яка не обов'язково належить множині D) називається *межовою* точкою множини D, якщо будь-який відкритий круг з центром в точці M (тобто будь-який окіл точки M) містить як точки, що належать множині D, так і точки, які не належать множині D.

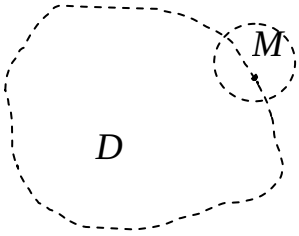


Рис.5

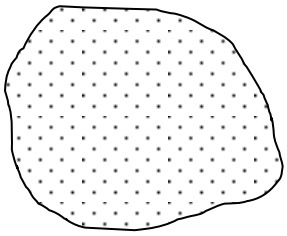
8. Сукупність усіх межових точок множини D називається *межею* множини D.

9. Множина D називається *замкненою*, якщо вона містить в собі свою межу.

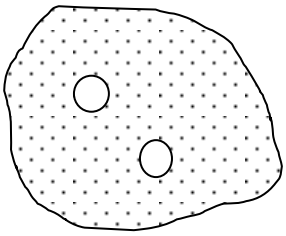
10. Множина D називається *зв'язною*, якщо її неможна розбити на дві замкнені неперетинні множини.

11. Множину D з непорожньою множиною внутрішніх точок, що обмежена, зв'язна і замкнена, будемо називати *замкненою областю* або просто *областю*.

12. Область D на площині будемо називати *однозв'язною*, якщо будь-яку зімкнену криву, що належить цій області, безперервно деформуючи, можна стягнути в точку, залишаючись при цьому в області D.



однозв'язна область



не однозв'язна область - многозв'язна

Рис. 6

У подальшому тут розглядаються <u>лише однозв'язні області</u>, з непорожньою множиною внутрішніх точок.

Межа множини D може бути досить складною. Ми обмежимось розглядом таких областей D, межа яких представляє собою, так звану, кусково-гладку зімкнену криву L. Дамо роз'яснення щодо таких кривих.

Криву, графік якої задається в системі координат xOy функцією $y=\varphi(x)$, $x\in[a,b]$, або $x=\psi(y)$, $y\in[c,d]$, називають гладкою, якщо ці функції мають неперервні похідні. На кінцях проміжку визначеності маються на увазі

односторонні похідні. Точки $(a,\varphi(a))$ і $(b,\varphi(b))$ (аналогічно $(c,\psi(c))$ і $(d,\psi(d))$) будемо називати *крайніми* точками відповідних кривих.

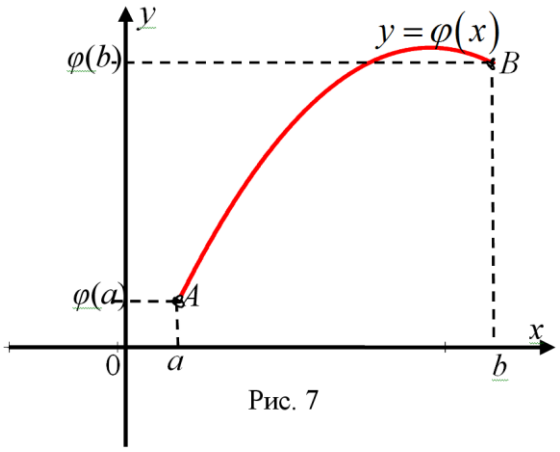


Рис. 7

На рис. 7 це точки A і B кривої $y=\varphi(x)$.

Будемо казати, що дві гладкі криві зістиковані, якщо вони мають одну спільну точку, і ця точка є крайньою для обох кривих.

Крива, яка зістикована зі скінченної кількості гладких кривих, причому так, що кожна точка стику є точкою стику тільки двох кривих, називається *кусково-гладкою*.

Якщо кусково-гладка крива така, що у кожної кривої, з якої вона складається, обидві крайні точки є точками стику, і інших спільних точок складові криві не мають, то таку кусково-гладку криву називають *зімкненою*. Винятком до поняття зістикованності тут буде випадок , коли зімкнена кусково-гладка крива складається лише з двох кривих.

У подальшому будемо розглядати функцію $z=f(x,y)$ з областю визначення D площини xOy за умови, що **D – замкнена однозв'язна область з непорожньою множиною внутрішніх точок, межа якої є зімкнена кусково-гладка крива, яка не має точок самоперетину.**

§2. Поняття подвійного інтеграла

Розглянемо задачу обчислення об'єму *криволінійного циліндру.*

Нехай $z=f(x,y)$ – невід'ємна, неперервна в області D функція. У тривимірному просторі рівняння $z=f(x,y)$ визначає деяку поверхню Ω, яка проектується на площину xOy в область D. Тіло G, яке обмежено зверху поверхнею Ω, знизу областю D з межею L, з боків – циліндричною поверхнею з напрямною L і твірними, які паралельні осі Oz, називають *криволінійним циліндром* (рис.8).

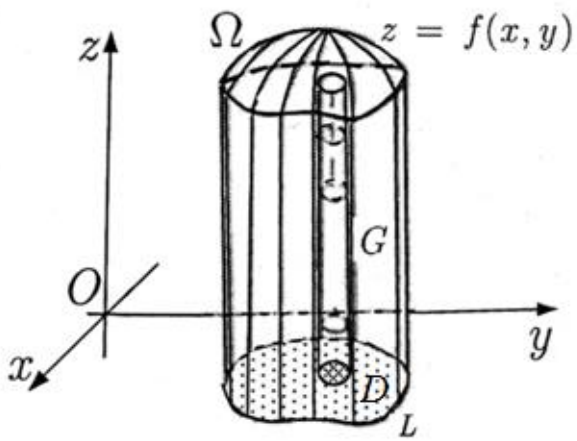


Рис. 8

Знайдемо об'єм криволінійного циліндра.

1. Розіб'ємо область D довільним чином на $n \times m$ ділянок D_{ij} з кусково-гладкими межами L_{ij}, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$. Таким чином, область D буде покрита сіткою, де D_{ij} − клітинка сітки. Позначимо діаметр кожної клітинки d_{ij}, а її площу − ΔS_{ij}. У кожній клітинці D_{ij} довільним чином виберемо точку $M\left(\xi_i,\eta_j\right)$. Через межі L_{ij} проведемо циліндричні поверхні із твірними, паралельними осі Oz, і з висотою, яка дорівнює $f\left(\xi_i,\eta_j\right)$.

2. Ці поверхні розіб'ють тіло G на $n \times m$ стовпчиків G_{ij}, об'єм кожного з яких

$$\Delta V_{ij} = f(\xi_i,\eta_j)\Delta S_{ij}, \quad i=\overline{1,n}, \quad j=\overline{1,m}\ .$$

3. Тоді для знаходження об'єму V криволінійного циліндра будемо мати приблизну рівність

$$V \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f\left(\xi_i,\eta_j\right)\Delta S_{ij}\ .$$

Сума $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f\left(\xi_i,\eta_j\right)\Delta S_{ij}$ називається інтегральною сумою.

4. Нехай d − найбільше з чисел d_{ij}. Очевидно, якщо $d \to 0$, то, зокрема, $n,m \to \infty$, і для значення об'єму тіла дістанемо

$$V = \lim_{\substack{d\to 0,\\ n,m\to\infty}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f\left(\xi_i,\eta_j\right)\Delta S_{ij}\ .$$

Вираз праворуч називають подвійним інтегралом від функції $f(x,y)$ за областю D і позначають

$$\lim_{\substack{d\to 0,\\ n,m\to\infty}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f\left(\xi_i,\eta_j\right)\Delta S_{ij} = \iint_D f\left(x,y\right)dS.$$

Отже, для об'єму циліндра маємо

$$V = \iint_D f\left(x,y\right)dS.$$

В цьому полягає геометричний зміст подвійного інтеграла.

Узагальнюючи конструкцію, застосовану при обчисленні об'єму циліндра, приходимо до наступного означення подвійного інтеграла за умови, що $z = f(x,y)$ вже довільна функція, яка визначена в області D .

<u>Означення.</u> Якщо існує скінченна границя інтегральної суми $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f\left(\xi_i,\eta_j\right)\Delta S_{ij}$, коли найбільший з діаметрів ділянок прямує до нуля, яка не залежить ані від способу розбиття області D на ділянки, ані від вибору точок усередині кожної ділянки, то її називають *подвійним інтегралом за областю* D від функції f і позначають

$$\iint_D f\left(x,y\right)dS = \lim_{\substack{d\to 0,\\ n,m\to\infty}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f\left(\xi_i,\eta_j\right)\Delta S_{ij}\,.$$

Якщо функція $f(x,y)$ ***неперервна в області D, то подвійний інтеграл*** $\iint_D f\left(x,y\right)dS$ ***існує.***

Оскільки границя інтегральної суми за умови неперервності функції $f(x,y)$ не залежить від способу розбиття області D на ділянки, то область D можна розбивати на ділянки D_{ij} прямими, які паралельні осям координат.

Нехай ΔD_{ij} – прямокутник зі сторонами $\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ \Delta y_j = y_j - y_{j-1},\ i=\overline{1,n},\ \ j=\overline{1,m}$, що належить області D (рис.9). Його площа дорівнює $\Delta x_i \Delta y_j$.

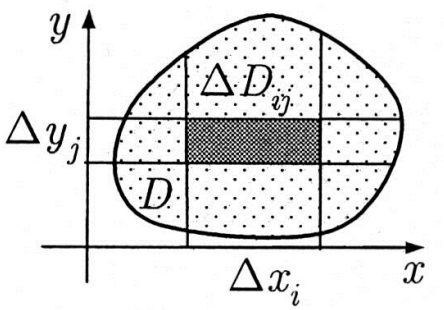


Рис. 9.

Такому розбиттю відповідає інтегральна сума

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i,\eta_j)\Delta x_i \Delta y_j\,.$$

Тоді за означенням подвійного інтеграла

$$\iint_D f\left(x,y\right)dxdy = \lim_{\substack{max\,\Delta x_i\to 0,\\ max\,\Delta y_j\to 0}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i,\eta_j)\Delta x_i \Delta y_j\,,$$

чим і обґрунтовується позначення $dxdy$ як міри (площі) елементарної ділянки.

§3. Властивості подвійного інтеграла

1. *(лінійність)*. Для будь-яких $\alpha,\beta\in R$:

$$\iint_D \left(\alpha f\left(x,y\right)+\beta g\left(x,y\right)\right)dxdy = \alpha\iint_D f\left(x,y\right)dxdy + \beta\iint_D g\left(x,y\right)dxdy\,,$$

за умови, що обидва подвійні інтеграли праворуч існують.

2. *(адитивність)*. Якщо область D є об'єднання двох областей D_1 та D_2 (рис.10), які не мають спільних внутрішніх точок, то

$$\iint\limits_{D=D_1\cup D_2} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

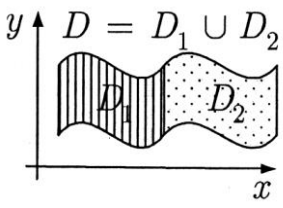


Рис. 10

3. *(нормованість)*. $\iint\limits_D 1dxdy = \text{площа}(D) = S_D$.

4. Якщо $f(x,y) \ge 0,\ (x,y) \in D$, і подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ існує, то $\iint\limits_D f(x,y)dxdy \ge 0$.

5. Якщо $f(x,y) \le g(x,y),\ (x,y) \in D$, то $\iint\limits_D f(x,y)dxdy \le \iint\limits_D g(x,y)dxdy$, за умови, що обидва подвійні інтеграли існують.

6. Якщо функція f неперервна в області D, то справедлива нерівність

$$mS_D \le \iint\limits_D f(x,y)dxdy \le MS_D,$$

де $m = \min\limits_D f(x,y)$, $M = \max\limits_D f(x,y)$, S_D – площа області D.

7. Якщо функція f неперервна в області D, то існує точка $M_0(x_0, y_0) \in D$ така, що

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(x_0, y_0)S_D.$$

У подальшому розглядаються неперервні в області D функції $f(x,y)$.

§4. Обчислення подвійного інтеграла у прямокутній декартовій системі координат

Покажемо, що обчислення подвійного інтеграла зводиться до обчислення двох визначених інтегралів.

Область D називають правильною у напрямі осі Oy, якщо будь-яка вертикальна пряма, що проходить через внутрішню точку області перетинає межу області не більше як у двох точках (рис.11).

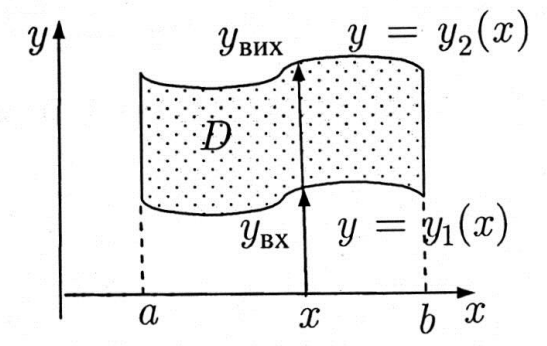


Рис. 11

Нехай неперервна функція $f(x,y) \ge 0$.

Тоді $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ виражає об'єм V циліндричного тіла.

Нехай $[a,b]$ − проекція області D на вісь Ox. Зафіксуємо x на відрізку $[a,b]$ і побудуємо переріз циліндричного тіла площиною $x = const$, перпендикулярної до осі Ox (рис.12). У перерізі дістанемо криволінійну трапецію $MNPQ$, площу якої можна знайти за формулою (x − константа, y − змінна):

$$S(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy, \quad x = const \in [a;b]$$

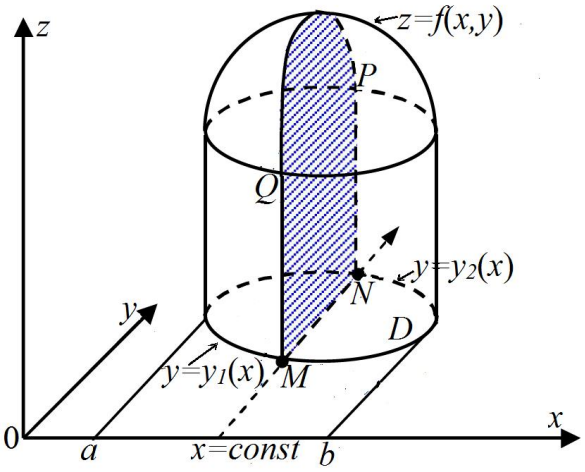


Рис.12

Згідно з методом перерізів

$$V = \int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx .$$

Отже,

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy . \qquad (4.1)$$

Інтеграл $\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$ називають *внутрішнім*, а інтеграл $\int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$ – *зовнішнім.* Праву частину одержаної формули називають *повторним* інтегралом.

Для області D, *правильної у напрямі осі Ox*, тобто області, для якої будь-яка горизонтальна пряма, що проходить через внутрішню точку області, перетинає межу області не більше як у двох точках (рис.13), маємо формулу

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \right) dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx.$$

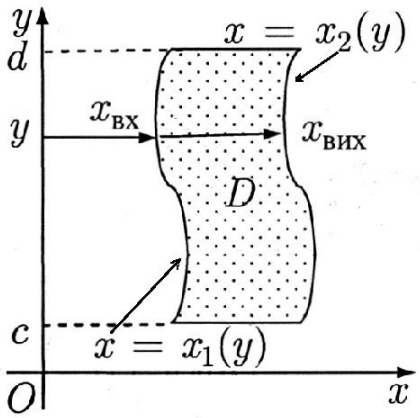


Рис. 13

Тут внутрішнім є інтеграл за змінною x.

Якщо область D обмежена вертикальними прямими $x = a$, $x = b$ та горизонтальними прямими $y = c$, $y = d$ (рис.14), то

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx.$$

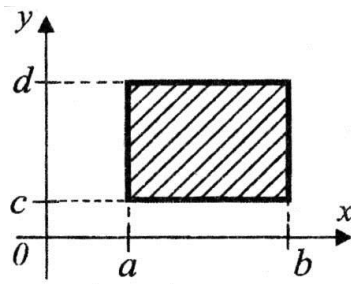


Рис.14

Причому це єдиний випадок сталих меж у внутрішньому інтегралі.

Формули обчислення подвійного інтеграла через повторні залишаються справедливими для будь-якої неперервної функції $f(x,y)$.

Зауваження. Якщо область не є правильною у жодному з напрямів, то її треба розбити на області, правильні в одному із напрямів.

Приклад 1. Довести, що за умови $f(x,y) = f_1(x)$, $g(x,y) = g_1(y)$ і прямокутної області інтегрування справедлива рівність

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y) \cdot g(x,y)dy = \int_a^b f(x,y)dx \cdot \int_c^d g(x,y)dy .$$

Доведення. Область інтегрування − прямокутник (рис. 14): $a \le x \le b$, $c \le y \le d$, тобто внутрішній інтеграл має сталі межі інтегрування. Запишемо у лівій частині рівності, яку треба довести, $f_1(x)$ замість $f(x,y)$ і $g_1(y)$ замість $g(x,y)$ та проінтегруємо одержаний вираз:

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y) \cdot g(x,y)dy = \int_a^b dx \int_c^d f_1(x) \cdot g_1(y)dy =$$

$$= \left\{\text{інтегруючи по } y,\ f_1(x) \text{ вважаємо сталою, тому виносимо } f_1(x) \text{ за інтеграл}\right\} =$$

$$= \int_a^b \left(f_1(x) \int_c^d g_1(y)dy \right) dx = \int_a^b \left(f_1(x) \cdot G_1(y) \Big|_c^d \right) dx = \left\{\text{де } G_1(y) \text{ є первісною функції } g_1(y)\right\} =$$

$$= \int_a^b f_1(x)\big(G_1(d) - G_1(c)\big)dx =$$

$$= \left\{\text{різниця } G_1(d) - G_1(c) \text{ не містить змінних, тобто є сталою, виносимо її за інтеграл}\right\} =$$

$$= \big(G_1(d) - G_1(c)\big) \cdot \int_a^b f_1(x)dx =$$

$$= \left\{ G_1(y) - \text{первісна для } g_1(y), \text{ тобто } \big(G_1(d) - G_1(c)\big) = \int_c^d g_1(y)dy \right\} =$$

$$= \int_c^d g_1(y)dy \cdot \int_a^b f_1(x)dx = \int_c^d g(x,y)dy \cdot \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b f(x,y)dx \cdot \int_c^d g(x,y)dy .$$

Отже, ми довели, що $\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\cdot g(x,y)dy = \int_a^b f(x,y)dx \cdot \int_c^d g(x,y)dy$ за умови, що $f(x,y) = f_1(x)$ і $g(x,y) = g_1(y)$.

Приклад 2. Обчислити повторний інтеграл $\int_{-3}^{3} dy \int_{y^2-4}^{5} (x+2y)dx$.

Розв'язок. Обчислимо спочатку внутрішній інтеграл. Інтегруючи по *x*, змінну *y* вважаємо сталою:

$$\int_{y^2-4}^{5} (x+2y)dx = \int_{y^2-4}^{5} x\,dx + 2y\cdot \int_{y^2-4}^{5} dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{y^2-4}^{5} + 2y\,x\Big|_{y^2-4}^{5} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(5^2 - \left(y^2-4\right)^2\right) + 2y\left(5 - \left(y^2-4\right)\right) = \frac{9}{2} - \frac{y^4}{2} + 4y^2 + 18y - 2y^3.$$

Тепер обчислимо зовнішній інтеграл від функції, яку отримали при обчисленні внутрішнього інтеграла:

$$\int_{-3}^{3}\left(\frac{9}{2} - \frac{y^4}{2} + 4y^2 + 18y - 2y^3\right)dy = \left.\left(\frac{9}{2}y - \frac{y^5}{10} + \frac{4y^3}{3} + 9y^2 - \frac{y^4}{2}\right)\right|_{-3}^{3} =$$

$$= \frac{9}{2}\left(3-(-3)\right) - \frac{3^5-(-3)^5}{10} + \frac{4}{3}\left(3^3-(-3)^3\right) + 9\left(3^2-(-3)^2\right) - \frac{3^4-(-3)^4}{2} =$$

$$= 27 - \frac{3^5}{5} + 72 + 0 - 0 = 50{,}4$$

Відповідь: 50,4

Приклад 3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D \left(xy^3 - 5x^2 + 4\right)dxdy$, де область *D* обмежена прямими $x = 3, y = -x,\ y = 2x$.

Розв'язок. Обчислення подвійного інтеграла $\iint_D \left(xy^3 - 5x^2 + 4\right)dxdy$ зведемо до обчислення повторного інтегралу.

Перш за все побудуємо область інтегрування (рис.15).

Знайдемо точки перетину ліній, що обмежують область інтегрування, розв'язуючи відповідні системи рівнянь:

$$A:\begin{cases} y = 2x \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow A(3;6), \quad B:\begin{cases} y + x = 0 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow B(3;-3), \quad O:\begin{cases} y = 2x \\ x + y \end{cases} \Rightarrow O(0;0).$$

Виберемо порядок інтегрування, пам'ятаючи, що зовнішній інтеграл повинен мати сталі межі інтегрування, а у внутрішнього інтеграла межі

інтегрування будуть функції, що залежать від змінної зовнішнього інтеграла. Задана область D правильна у напрямі осі Oy, тому природно вибрати змінну x змінною зовнішнього інтеграла. Для заданої області D інтервал зміни змінної x буде $0 \le x \le 3$ (рис.15). Тепер, щоб визначити як змінюється змінна y, коли $x \in [0,3]$, будемо проводити через точки відрізку $[0,3]$ на осі x довільні прямі, паралельні осі Oy, рухаючись по осі x від точки 0 до точки 3. Всі ці прямі будуть перетинати область D, при цьому точки входу цих прямих в область D будуть лежати на прямій $y = -x$, а точки виходу − на прямій $y = 2x$ (рис. 16). Таким чином, для заданої області D, коли змінна x прямує від $x_1 = 0$ до $x_2 = 3$, змінна y змінюється від $y_1(x) = -x$ до $y_2(x) = 2x$ (це і є межі інтегрування внутрішнього інтеграла).

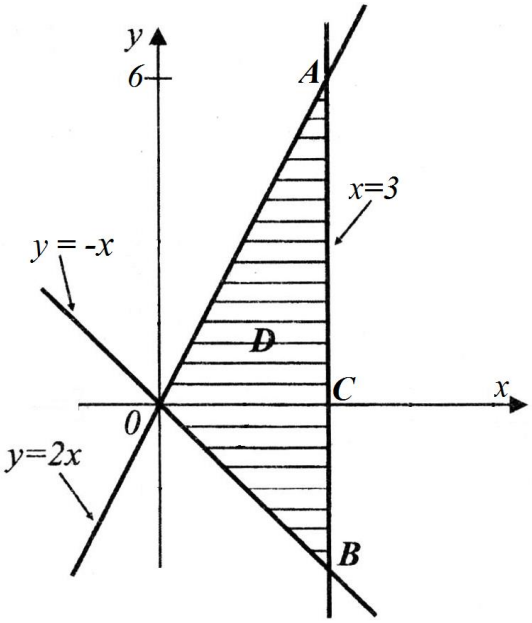


Рис.15

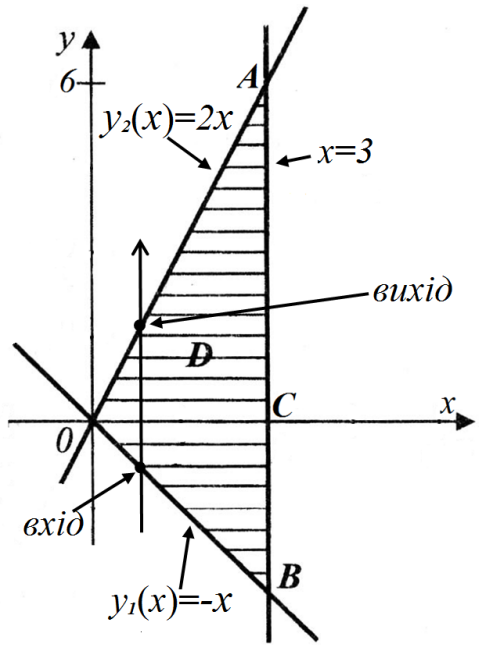


Рис.16

Отже, заданий подвійний інтеграл запишеться у вигляді повторного інтеграла:

$$I = \iint\limits_D \left(xy^3 - 5x^2 + 4\right)dxdy = \int\limits_0^3 dx \int\limits_{-x}^{2x} \left(xy^3 - 5x^2 + 4\right)dy = \int\limits_0^3 \left(\int\limits_{-x}^{2x} \left(xy^3 - 5x^2 + 4\right)dy \right)dx .$$

Почнемо з обчислення внутрішнього інтеграла. Інтегруючи по y, змінну x вважаємо сталою:

$$\int\limits_{-x}^{2x} \left(xy^3 - 5x^2 + 4\right)dy = x\int\limits_{-x}^{2x} y^3 dy - 5x^2 \int\limits_{-x}^{2x} dy + 4\int\limits_{-x}^{2x} dy = x \cdot \frac{y^4}{4}\Bigg|_{-x}^{2x} - 5x^2 \cdot y\Bigg|_{-x}^{2x} + 4y\Bigg|_{-x}^{2x} =$$

$$= \frac{x}{4}\left((2x)^4 - (-x)^4\right) - 5x^2\left(2x - (-x)\right) + 4\left(2x - (-x)\right) = \frac{15}{4}x^5 - 15x^3 + 12x .$$

Тепер обчислимо зовнішній інтеграл від функції, яку отримали при обчисленні внутрішнього інтеграла:

$$\int_0^3\left(\frac{15}{4}x^5-15x^3+12x\right)dx=\frac{15}{4}\int_0^3 x^5dx-15\int_0^3 x^3dx+12\int_0^3 x\,dx=\frac{5}{8}x^6\Big|_0^3-\frac{15}{4}x^4\Big|_0^3+6x^2\Big|_0^3=\frac{1647}{8}.$$

Зауважимо, що можна було б вибрати y в якості змінної зовнішнього інтеграла, але задана область D не є правильною у напрямі осі Ox, тому довелось би розбити область D на дві правильні області у напрямі осі Ox (OAC та OCB) а, отже, для обчислення заданого інтеграла треба було б обчислити два повторних інтеграли. Тому при виборі порядку інтегрування потрібно завжди враховувати, який спосіб для обчислення найзручніший.

Відповідь: $\frac{1647}{8}$.

Приклад 4. Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{-2}^{1}dy\int\limits_{y^2-4}^{0}f\left(x,y\right)dx$.

Розв'язок. Зміна порядку інтегрування в повторному інтегралі полягає в зміні ролі змінних інтегрування. Так, у даному прикладі внутрішнє інтегрування проводиться за змінною x, а зовнішнє – за y. Змінити порядок інтегрування – означає записати даний повторний інтеграл у вигляді іншого повторного інтегралу, в якому змінна інтегрування внутрішнього інтеграла буде y, а зовнішнього – x.

Область інтегрування D безпосередньо не задана, тому спочатку потрібно побудувати область інтегрування, виходячи з меж повторного інтеграла. Ця область буде правильною у напрямі осі Ox, оскільки зовнішній інтеграл береться за змінною y. Прямі $y=-2$ і $y=1$ паралельні осі Ox і обмежують область інтегрування знизу та зверху. За цих умов змінна x задовольняє нерівності $y^2-4\le x\le 0$, тобто область D ліворуч обмежена лінією $x=y^2-4$, а праворуч − лінією $x=0$.

Побудуємо область інтегрування. Лінія $x=y^2-4$ – парабола, симетрична щодо осі Ox, з вершиною в точці $A(-4;0)$, гілки параболи напрямлені праворуч; $x=0$ – рівняння осі Oy; $y=-2$, $y=1$ – прямі, паралельні осі Ox (рис. 17).

Знайдемо точки перетину ліній, що обмежують область D:

$$B:\begin{cases}x=y^2-4\\y=1\end{cases}\Rightarrow B(-3;1),\quad C:\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}\Rightarrow C(0;1),\quad M:\begin{cases}x=0\\x=y^2-4\end{cases}\Rightarrow M(0;-2).$$

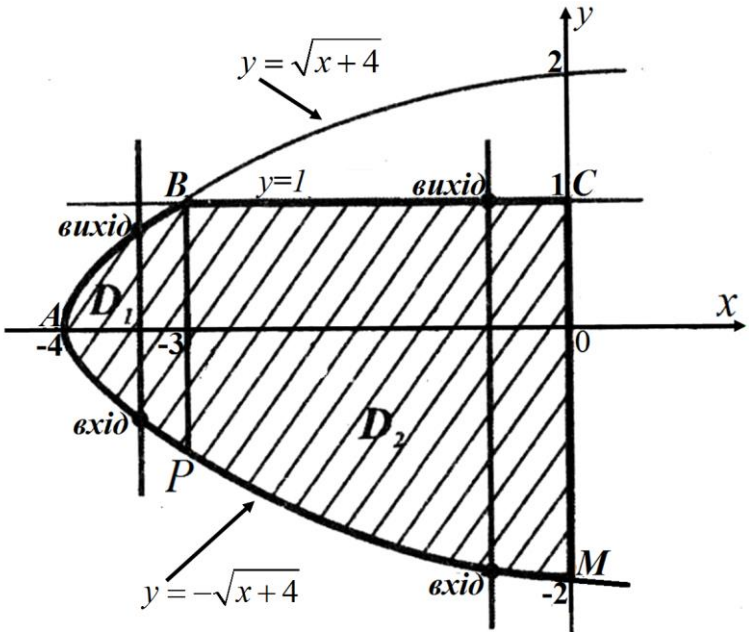


Рис. 17

З рис.17 видно, що область D не є правильною у напрямі осі Oy, тому треба розбити область D на правильні області у напрямі осі Oy. Для цього спроектуємо область D на вісь Ox і отримаємо для змінної x на осі Ox проміжок зміни: $x\in[-4,0]$. Тепер, щоб визначити як змінюється змінна y, коли $x\in[-4,0]$, будемо проводити через точки відрізку $[-4,0]$ на осі x довільні прямі, паралельні осі Oy, рухаючись по осі x від точки -4 до точки 0. Всі ці прямі будуть перетинати область D. Від $x=-4$ до $x=-3$ точки входу цих прямих в область D будуть лежати на нижній гілці параболи $x=y^2$ (її рівняння $y=-\sqrt{x+4}$), а точки виходу − на верхній гілці цієї параболи (її рівняння $y=\sqrt{x+4}$), а від $x=-3$ до $x=0$ точки входу − на нижній гілці параболи $x=y^2$, а точки виходу − на прямій $y=1$ (рис. 17). Отож, область D треба розбити на дві правильні області D_1 − фігура $PABP$ і D_2 − фігура $PBCMP$. Точка P симетрична точці B відносно осі Ox і має координати $(-3;-1)$. Коли змінна x змінюється від $x=-4$ до $x=-3$, змінна y змінюється від $y=-\sqrt{x+4}$ до $y=\sqrt{x+4}$ (це є межі інтегрування внутрішнього інтеграла першого повторного інтеграла), а коли змінна x змінюється від $x=-3$ до $x=0$, змінна y змінюється від $y=-\sqrt{x+4}$ до $y=1$ (це є межі інтегрування внутрішнього інтеграла другого повторного інтеграла). Таким чином, маємо:

$$\int_{-2}^{1}dy\int_{y^2-4}^{0}f(x,y)dx=\int_{-4}^{-3}dx\int_{-\sqrt{x+4}}^{\sqrt{x+4}}f(x,y)dy+\int_{-3}^{0}dx\int_{-\sqrt{x+4}}^{1}f(x,y)dy.$$

Зауваження: рівняння ліній, що обмежують область інтегрування D і є межами внутрішнього інтеграла, повинні бути визначені як функції щодо змінної, за якою обчислюється зовнішній інтеграл.

Приклад 5. Змінивши порядок інтегрування, записати даний вираз у вигляді одного повторного інтеграла:

$$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x,y)dy .$$

Розв'язок. Область інтегрування D_1 першого інтеграла визначається нерівностями $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x^2$, а область інтегрування D_2 другого інтеграла визначається нерівностями $1 \le x \le 3$, $0 \le y \le \dfrac{3-x}{2}$.

Побудуємо ці області:

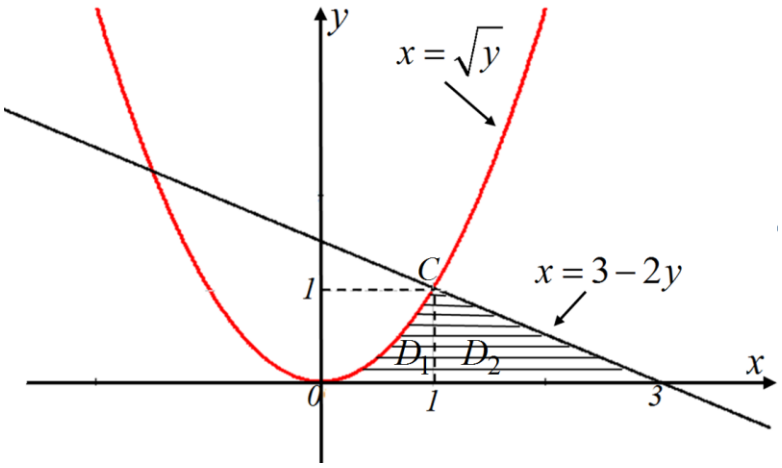


Рис. 18

Область $D = D_1 \bigcup D_2 -$ правильна у напрямі осі Ox, обмежена параболою $y = x^2$ та прямими $y = \dfrac{3-x}{2}$ і $y = 0$ (рис.18).

Точка C перетину параболи $y = x^2$ та прямої $y = \dfrac{3-x}{2}$ має координати

$$C: \begin{cases} y = x^2 \\ y = \dfrac{3-x}{2} \end{cases} \Rightarrow C(1;1).$$

Область D проектується на вісь Oy в проміжок $[0,1]$, тобто зовнішній інтеграл за змінною y буде мати нижню межу інтегрування 0, а верхню − 1. Щоб з'ясувати, як змінюється змінна x, коли $y \in [0,1]$, будемо проводити через точки відрізку $[0,1]$ на осі y довільні прямі, паралельні осі Ox, рухаючись по осі Oy від точки 0 до точки 1. Всі ці прямі будуть перетинати область D, при цьому точки входу цих прямих в область D будуть лежати на правій гілці параболи

$y = x^2$, рівняння якої $x = \sqrt{y}$, а точки виходу − на прямій $y = \frac{3 - x}{2}$, рівняння якої запишемо у вигляді $x = 3 - 2y$ (рис. 18). Таким чином, для області D, коли змінна y прямує від $y = 0$ до $y = 1$, змінна x змінюється від $x = \sqrt{y}$ до $x = 3 - 2y$ (це і є межі інтегрування внутрішнього інтеграла)

$$D: \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ \sqrt{y} \le x \le 3 - 2y \end{cases}.$$

Заданий вираз запишемо у вигляді одного повторного інтеграла:

$$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)dx.$$

§5. Заміна змінних у подвійному інтегралі

5.1. Загальний випадок заміни змінної

Нехай $f(x,y)$− неперервна в області D функція. За таких умов існує подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$. Відобразимо область D за допомогою функцій $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ в область $\tilde{D}$. При цьому будемо вважати, що таке відображення взаємно-однозначне, тобто виконуються наступні умови:

1) кожна точка області D відображається в єдину точку області $\tilde{D}$;
2) різні точки області D відображаються в різні точки області $\tilde{D}$;
3) кожній точці області $\tilde{D}$ відповідає точка області D, яка відображається в цю точку.

За таких умов з функцій $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ однозначно можна виразити функції $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$.

Тоді кожній точці $M(x;y) \in D$ відповідає певна точка $\tilde{M}(u,v) \in \tilde{D}$.

Якщо функції $x(u,v)$ та $y(u,v)$ мають в області $\tilde{D}$ неперервні частинні похідні, то справедлива наступна *формула заміни змінних у подвійному інтегралі*:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\tilde{D}} f\big(x(u,v), y(u,v)\big)\big|J(u,v)\big|dudv, \qquad (5.1)$$

де $J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$, за умови, що $J(u,v) \ne 0$.

Визначник $J(u,v)$ називають *якобіаном (визначником Якобі-Остроградського)*. Його модуль є коефіцієнтом спотворення площі за такої заміни змінних, тобто: $dxdy = |J(u,v)|dudv$.

5.2. Подвійний інтеграл у полярних координатах

Частинним випадком заміни змінних у подвійному інтегралі є перехід від прямокутних декартових до полярних координат (рис.19). Такий перехід здійснюють за наступними формулами:

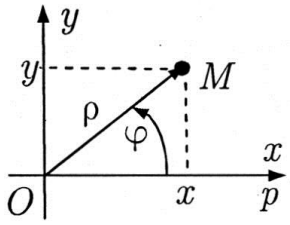


Рис. 19

$$\begin{cases} x = \rho cos\varphi \\ y = \rho sin\varphi \end{cases}, \quad \rho > 0, \ 0 < \varphi \le 2\pi,$$

тобто, в даному випадку функції $x = x(\rho,\varphi)$, $y = y(\rho,\varphi)$ взаємно-однозначно перетворюють область $\tilde{D}$ в область *D*.

При цьому маємо:

$$J(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho,$$

тобто $|J(\rho,\varphi)| = \rho$.

Таким чином, при переході від прямокутної декартової системи координат до полярної системи формула (5.1) набуває наступного вигляду:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\tilde{D}} f\left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\right)\rho d\varphi d\rho. \qquad (5.2)$$

В області, яка обмежена променями $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ і кривими $\rho = \rho_1(\varphi)$, $\rho = \rho_2(\varphi)$, $\rho_1(\varphi) < \rho_2(\varphi)$, і яку називають радіальною (рис.20), для обчислення подвійного інтеграла справедлива формула:

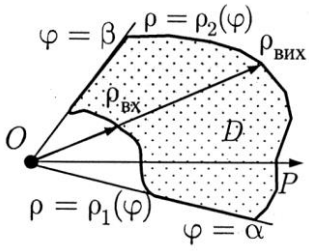


Рис. 20

$$\iint\limits_{\tilde{D}} f\left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\right)\rho d\varphi d\rho = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f\left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\right)\rho d\rho$$

Для *узагальненої полярної системи координат*:

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi \\ y = b\rho\sin\varphi \end{cases}, \quad \rho > 0, \ 0 < \varphi \le 2\pi, \quad J(\rho,\varphi) = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -a\rho\sin\varphi \\ b\sin\varphi & b\rho\cos\varphi \end{vmatrix} = ab\rho,$$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = ab\iint\limits_{\tilde{D}} f\left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\right)\rho d\varphi d\rho. \qquad (5.3)$$

§6. Застосування подвійних інтегралів

Подвійний інтеграл має широке застосування як в математиці, так і в різних розділах фізики і механіки.

6.1. Об'єм циліндроїда (геометричний зміст подвійного інтеграла)

Об'єм криволінійного циліндра, обмеженого зверху поверхнею $z = f(x, y) \geq 0$, яка проектується на площину Oxy в область D, обчислюється за формулою:

$$V = \iint_D f(x, y)dxdy. \qquad (6.1)$$

6.2. Площа плоскої області D

$$S_D = \iint_D dxdy. \qquad (6.2)$$

6.3. Площа поверхні

Нехай функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні $f'_x(x, y)$ і $f'_y(x, y)$ в області D. У тривимірному просторі рівняння $z = f(x, y)$ визначає деяку поверхню Ω, яка проектується на площину xOy в область D (рис.8). Площа S_Ω цієї поверхні обчислюється за формулою

$$S_\Omega = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\, dxdy. \qquad (6.3)$$

6.4. Маса пластинки D

Нехай в області D розподілена деяка маса (електричний заряд, теплота тощо).

Розіб'ємо пластинку D довільним чином на $n \cdot k$ ділянок D_{ij} з площею ΔS_{ij} і масою Δm_{ij}, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, k}$.

Середньою густиною розподілу маси на ділянці D_{ij} називають відношення $\dfrac{\Delta m_{ij}}{\Delta S_{ij}}$.

Нехай $M(x, y)$ − будь-яка точка в області D і D_{ij} − та ділянка розбиття, яка містить точку $M(x, y)$. Нехай тепер ділянка D_{ij} стягується в точку $M(x, y)$, що позначатимемо, як $D_{ij} \to M$, тоді і $\Delta S_{ij} \to 0$. Якщо існує границя

$$\lim_{D_{ij} \to M} \frac{\Delta m_{ij}}{\Delta S_{ij}},$$

то вона є деякою функцією від точки $M(x,y)$, і цю функцію називають поверхневою густиною

$$\mu(x,y)=\lim_{D_{ij}\to M}\frac{\Delta m_{ij}}{\Delta S_{ij}}.$$

Нехай, навпаки, в області D задано поверхневу густину розподілу маси як неперервну функцію $\mu(x,y)$, $(x,y)\in D$, і треба визначити масу m пластинки D. Знову розіб'ємо пластинку D довільним чином на $n\cdot k$ ділянок D_{ij} з площею ΔS_{ij} і масою Δm_{ij}, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,k}$, і виберемо в кожній ділянці D_{ij} довільну точку (x_i,y_j). Тоді

$$\Delta m_{ij}\approx\mu(x_i,y_j)\Delta S_{ij},\quad m\approx\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\mu(x_i,y_j)\Delta S_{ij},$$

$$m=\lim_{\substack{n\to\infty,\\ k\to\infty}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\mu(x_i,y_j)\Delta S_{ij}=\iint_D\mu(x,y)dxdy.$$

Отже, масу пластинки D з поверхневою густиною $\mu(x,y)$, $(x,y)\in D$ знаходять за формулою

$$m=\iint_D\mu(x,y)dxdy. \tag{6.4}$$

Якщо пластинка однорідна, то $\mu(x,y)=\mu-const.$

6.5. Статичні моменти

Статичними моментами матеріальної точки масою m щодо осі *Ox* та осі *Oy* називають відповідно наступні величини:

$$M_x=my \text{ і } M_y=mx.$$

Нехай в області D задано поверхневу густину розподілу маси $\mu(x,y)$, як неперервну функцію, $(x,y)\in D$. Розіб'ємо фігуру D на $n\cdot k$ ділянок D_{ij} з площею ΔS_{ij}, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,k}$. Виберемо в кожній ділянці D_{ij} точку (x_i,y_j). Наближено можна вважати, що маса ділянки D_{ij} зосереджена в точці (x_i,y_j) і дорівнює $\mu(x_i,y_j)\Delta S_{ij}$. Тоді статичні моменти цієї ділянки відносно осей *Ox* та *Oy* дорівнюють відповідно $y_j\mu(x_i,y_j)\Delta S_{ij}$ та $x_i\mu(x_i,y_j)\Delta S_{ij}$. Якщо підсумувати статичні моменти усіх ділянок, то отримуємо наближенні значення для статичних моментів пластинки

$$M_x\approx\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}y_j\mu(x_i,y_j)\Delta S_{ij},$$

$$M_y\approx\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}x_i\mu(x_i,y_j)\Delta S_{ij}.$$

Переходячи в останніх рівностях до границь при $n,k \to \infty$, отримаємо формули для обчислення статичних моментів пластинки D відносно осей Ox та Oy відповідно:

$$M_x = \iint\limits_D y\mu(x,y)dxdy, \tag{6.5.1}$$

$$M_y = \iint\limits_D x\mu(x,y)dxdy. \tag{6.5.2}$$

6.6. Моменти інерції пластинки

Моментом інерції матеріальної точки масою m відносно координатних осей Ox і Oy називається добуток маси на квадрат відстані точки до відповідної осі, тобто $I_x = my^2$ і $I_y = mx^2$.

По аналогії з попереднім, дістаємо формули для обчислення моментів інерції пластинки D масою m з поверхневою густиною розподілу маси $\mu(x,y)$ відносно координатних осей Ox і Oy відповідно:

$$I_x = \iint\limits_D y^2\mu(x,y)dxdy, \tag{6.6.1}$$

$$I_y = \iint\limits_D x^2\mu(x,y)dxdy. \tag{6.6.2}$$

Момент інерції I_O пластинки D масою m відносно початку координат $O(0,0)$, називають величину, яка дорівнює сумі моментів інерції відносно осей

$$I_O = I_x + I_y = \iint\limits_D \left(y^2 + x^2\right)\mu(x,y)dxdy. \tag{6.6.3}$$

6.7. Координати центра мас пластинки

Нехай точка $C(\overline{x},\overline{y})$ − центр мас (центр ваги) пластинки D масою m з поверхневою густиною розподілу маси $\mu(x,y)$. Координати цієї точки знаходяться за формулами:

$$\overline{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\iint\limits_D x\mu(x,y)dxdy}{\iint\limits_D \mu(x,y)dxdy}, \tag{6.7.1}$$

$$\overline{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\iint\limits_D y\mu(x,y)dxdy}{\iint\limits_D \mu(x,y)dxdy}. \tag{6.7.2}$$

Приклад 6. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 + 1$, $y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$.

Розв'язок. Обчислимо площу області D за формулою $S_D = \iint\limits_D dxdy$. Побудуємо область D, обмежену заданими лініями. Рівняння $y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$ задає пряму, а графіком функції $y = x^2 + 1$ є парабола (рис.21).

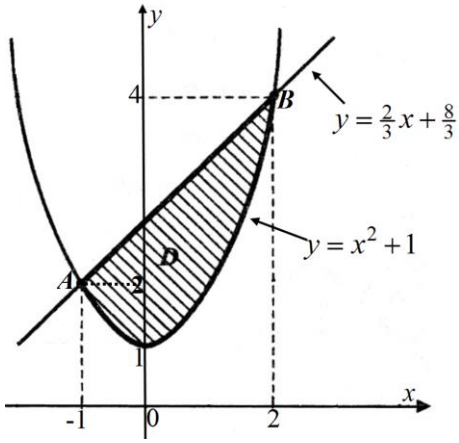


Рис.21

Знайдемо координати точок перетину цих ліній:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 5 \\ y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow \quad A(-1;2),\ B(2;4).$$

Визначимось з порядком і межами інтегрування у повторному інтегралі: змінна y змінюється від параболи $y = x^2 + 1$ до прямої $y = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$, коли змінна x змінюється від -1 до 2, тобто зовнішній інтеграл візьмемо за змінною x, а внутрішній − за змінною y. Отже, переходячи до повторного інтеграла, матимемо:

$$S_D = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{x^2+1}^{\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}} dy = \int\limits_{-1}^{2} \left(y \Big|_{x^2+1}^{\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}} \right) dx = \int\limits_{-1}^{2} \left(\frac{2}{3}x + \frac{8}{3} - \left(x^2 + 1\right) \right) dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{2} \left(\frac{2}{3}x - x^2 + \frac{5}{3} \right) dx = \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{3} + \frac{5x}{3} \right) \Bigg|_{-1}^{2} = \frac{1}{3}(3 - 9 + 15) = 3$$

Відповідь: 3 кв. од.

Приклад 7. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими $x^2 + y^2 = 16$ і $x^2 + y^2 - 8y = 0$ (зовні кола $x^2 + y^2 = 16$).

Розв'язок. Задані лінії – кола (рис.22). Рівняння $x^2 + y^2 = 16$ задає коло з центром у точці (0;0) і радіусом $R = 4$. Виділивши повний квадрат у другому рівнянні, ми визначимо координати центра і радіус кола:

$$x^2 + y^2 - 2 \cdot 4y + 16 - 16 = 0 \Rightarrow x^2 + (y - 4)^2 = 16,$$

тобто це коло з центром у точці (0;4) і радіусом $R = 4$.

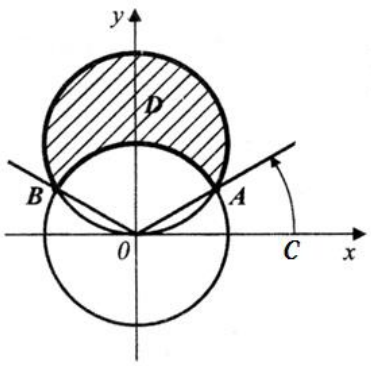


Рис. 22

Іноді, при наявності у рівняннях заданих кривих виразу $\left(x^2 + y^2\right)$, обчислення спрощується, якщо перейти до полярних координат за допомогою формул

$$x = \rho\cos\varphi,$$
$$y = \rho\sin\varphi.$$

Запишемо рівняння заданих кіл у полярній системі координат:

$$x^2 + y^2 = 16 \;\Rightarrow\; \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = 16 \;\Rightarrow\; \rho^2 = 16 \;\Rightarrow\; \rho = 4;$$

$$x^2 + y^2 = 8y \;\Rightarrow\; \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = 8\rho\sin\varphi \;\Rightarrow\; \rho = 8\sin\varphi.$$

Площа області D у прямокутній декартовій системі координат обчислюється за формулою (6.2) $S_D = \iint\limits_D dxdy$. Враховуючи, що при переході до полярних координат $dxdy = \rho d\rho d\varphi$, отримаємо формулу для обчислення площі області D у полярній системі координат:

$$S_D = \iint\limits_D dxdy = \iint\limits_D \rho d\rho d\varphi. \qquad (6.8)$$

Обчислення подвійного інтеграла в полярній системі координат зведемо до послідовного інтегрування щодо змінних ρ і φ.

Оскільки полюс не міститься всередині області інтегрування D, то проводимо промені OA і OB так, щоб кут AOB містив в собі область D і був при цьому мінімальним кутом з такою властивістю. Для встановлення значення полярних кутів $\varphi_1 = \angle COA$ і $\varphi_2 = \angle COB$, які відповідають названим променям, розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} \rho = 4 \\ \rho = 8\sin\varphi \end{cases} \;\Rightarrow\; 8\sin\varphi = 4 \;\Rightarrow\; \sin\varphi = \frac{1}{2} \;\begin{matrix} \varphi_1 = \dfrac{\pi}{6} \\ \varphi_2 = \dfrac{5\pi}{6} \end{matrix}.$$

Таким чином, змінна зовнішнього інтеграла φ приймає значення від $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{6}$ до $\varphi_2 = \dfrac{5\pi}{6}$. В області інтегрування полярний радіус ρ змінюється при кожному значенні φ від кола $\rho = 4$ до кола $\rho = 8\sin\varphi$. Ці рівняння вказують межі інтегрування внутрішнього інтеграла.

Обчислимо

$$S_D = \iint\limits_D \rho d\rho d\varphi = \int\limits_{\pi/6}^{5\pi/6} d\varphi \int\limits_4^{8\sin\varphi} \rho d\rho = \int\limits_{\pi/6}^{5\pi/6} \left.\frac{\rho^2}{2}\right|_4^{8\sin\varphi} d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_{\pi/6}^{5\pi/6}\left(8^2\sin^2\varphi - 4^2\right)d\varphi =$$

$$= 8\int\limits_{\pi/6}^{5\pi/6}\left(4\sin^2\varphi - 1\right)d\varphi = \left\{\text{застосуємо формулу } 2\sin^2\varphi = 1 - \cos 2\varphi\right\} =$$

$$= 8\int\limits_{\pi/6}^{5\pi/6}\left(2\left(1-\cos 2\varphi\right)-1\right)d\varphi = 8\int\limits_{\pi/6}^{5\pi/6}\left(1 - 2\cos 2\varphi\right)d\varphi = 8\int\limits_{\pi/6}^{5\pi/6} d\varphi - 8\int\limits_{\pi/6}^{5\pi/6}\cos 2\varphi d\left(2\varphi\right) =$$

$$=8\varphi\Big|_{\pi/6}^{5\pi/6}-8\sin 2\varphi\Big|_{\pi/6}^{5\pi/6}=8\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)-8\left(\sin\frac{5\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$=\frac{16\pi}{3}-8\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{16\pi}{3}+8\sqrt{3}.$$

Відповідь: $\left(\frac{16\pi}{3}+8\sqrt{3}\right)$ кв. од.

Приклад 8. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z=x^2+y^2$, $y=x^2$, $y=1$, $z=0$, $x=0$.

Розв'язок. Об'єм циліндричного тіла з твірними, паралельними осі Oz, побудованого на області D як на основі і обмеженого зверху поверхнею $z=f(x,y)$, обчислюється за формулою (6.1) $V=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

Поверхні, що обмежують циліндричне тіло, об'єм якого треба знайти, − це параболоїд обертання $z=x^2+y^2$, площини $y=1$, $z=0$ (площина xOy), $x=0$ (площина yOz), циліндрична поверхня $y=x^2$ − зображено на рис. 23:

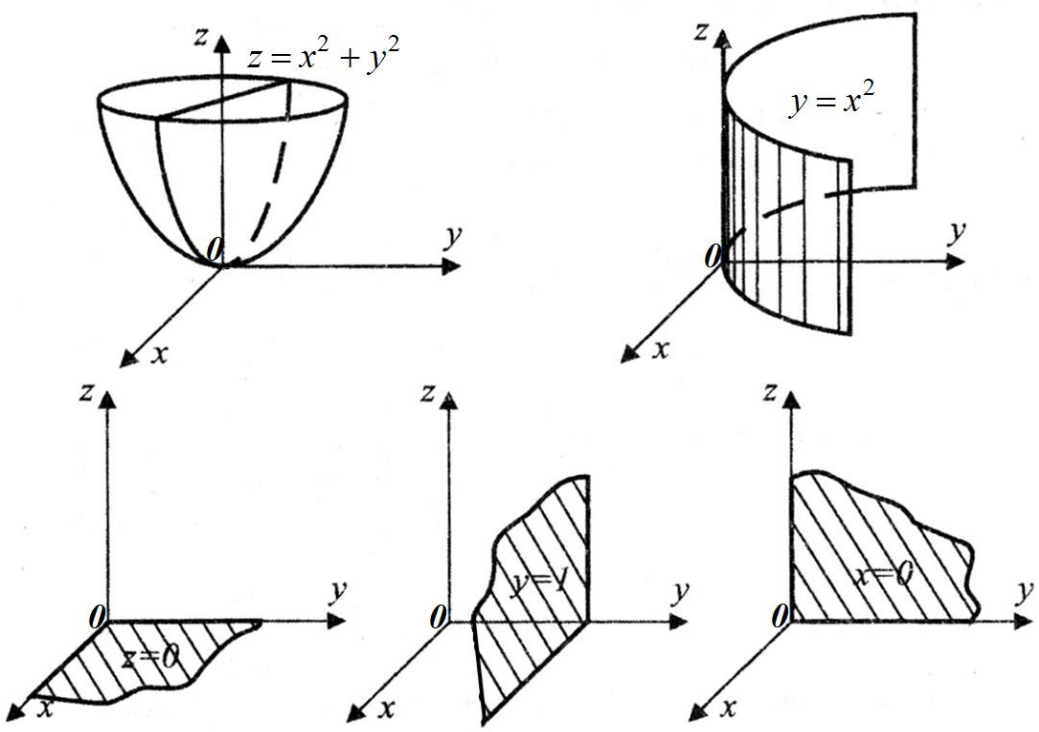


Рис.23

Побудуємо тіло (рис.24а), обмежене даними поверхнями, і розглянемо проекцію D отриманого тіла на площину xOy (рис.24б):

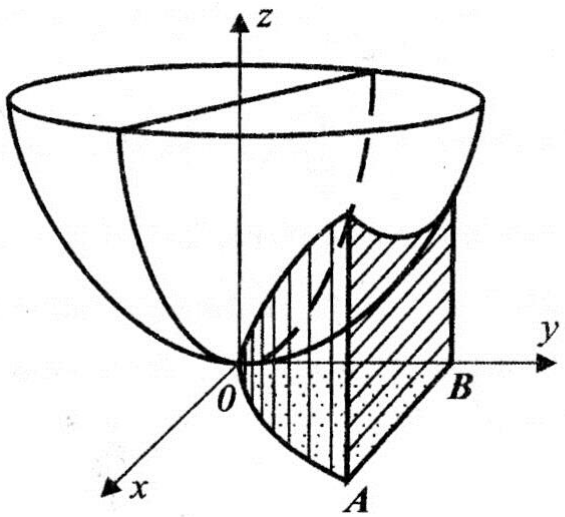


Рис.24а

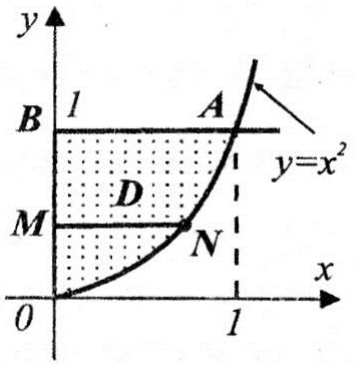


Рис.24б

Областю інтегрування D є плоска фігура AOB (рис.24б), що обмежена правою гілкою параболи $y = x^2$ або, що теж саме, $x = \sqrt{y}$ (AO), прямими $y = 1$ (AB) і $x = 0$ (OB). Ця область є правильною в напрямі осі Ox, тому, природно, вибрати y змінною інтегрування зовнішнього інтеграла. Для заданої області D y змінюється від т.O до т.B, отже, $0 \le y \le 1$. Тоді змінною внутрішнього інтеграла буде x. Щоб з'ясувати, як змінюється змінна x, коли $y \in [0,1]$, будемо проводити через точки відрізку $[0,1]$ на осі Oy довільні прямі, паралельні осі Ox, рухаючись по осі Oy від точки 0 до точки 1. Всі ці прямі будуть перетинати область D, при цьому точки входу цих прямих в область D будуть лежати на осі Oy, тобто на прямій $x = 0$, а точки виходу − на гілці параболи $x = \sqrt{y}$ (на рис. 24б це пряма MN). Таким чином, для заданої області D, коли змінна y прямує від $y = 0$ до $y = 1$, змінна x змінюється від $x = 0$ до $x = \sqrt{y}$ (це і є межі інтегрування внутрішнього інтеграла). Підінтегральна функція в формулі (6.1) − це поверхня, яка обмежує циліндричне тіло зверху, тобто $z(x,y) = x^2 + y^2$. Отже,

$$V = \iint_D z(x,y)\,dxdy = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} \left(x^2 + y^2\right) dx = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3} + y^2 x \right)\Bigg|_0^{\sqrt{y}} dy = \int_0^1 \left(\frac{\left(\sqrt{y}\right)^3}{3} + y^2\sqrt{y} \right) dy =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 y^{\frac{3}{2}} dy + \int_0^1 y^{\frac{5}{2}} dy = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{2y^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{2y^{\frac{7}{2}}}{7} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{7} = \frac{44}{105}.$$

Відповідь: $\frac{44}{105}$ куб. од.

Приклад 9. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z=0$, $x^2+y^2=4x$, $z=2\sqrt{x^2+y^2}$.

Розв'язок. Задане тіло обмежено знизу $z=0$, тобто координатною площиною *xOy*, з боків – коловим циліндром $x^2+y^2-4x=0$, а зверху – конічною поверхнею $z=2\sqrt{x^2+y^2}$ (рис. 25а). Область D − проекція тіла на площину *xOy* − являє собою круг, обмежений колом $x^2+y^2=4x$ (рис. 25б).

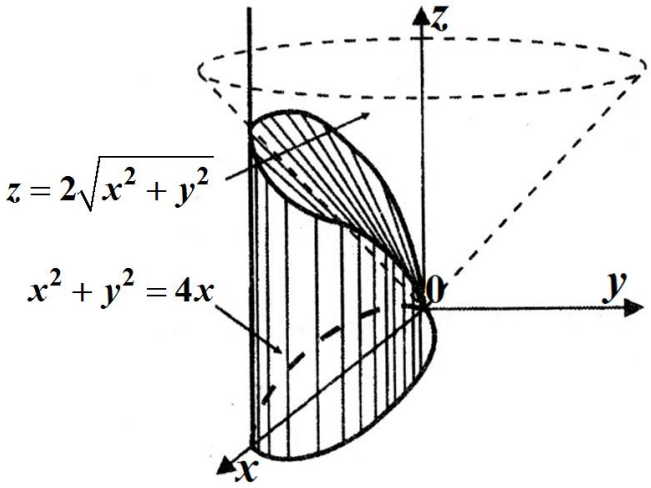


Рис. 25а

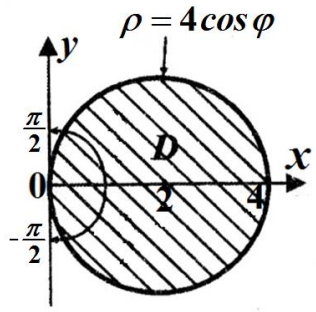


Рис. 25б

Тоді $V=\iint\limits_D z(x,y)\,dxdy=\iint\limits_D 2\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$.

Через те, що область D − площина круга, має сенс перейти до полярних координат за формулами: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. При цьому $dxdy=\rho d\rho d\varphi$. Рівняння кола, що обмежує область інтегрування D, набуде у полярній системі координат вигляду

$$x^2+y^2=4x \quad\Rightarrow\quad \rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=4\rho\cos\varphi \quad\Rightarrow\quad \rho=4\cos\varphi.$$

Визначимо межі інтегрування по області D полярних змінних: $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$, $0\le\rho\le 4\cos\varphi$.

Перейдемо від подвійного інтеграла до повторного:

$$V=\iint\limits_D 2\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=2\iint\limits_D\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}\,\rho d\rho d\varphi=2\iint\limits_D\rho^2 d\rho d\varphi=$$

$$=2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{4\cos\varphi}\rho^2 d\rho=2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^{4\cos\varphi}d\varphi=\frac{2\cdot 4^3}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi d\varphi=\frac{128}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\cos\varphi d\varphi=$$

$$=\frac{128}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2\varphi\right)d\sin\varphi=\frac{128}{3}\left(\sin\varphi-\frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{128}{3}\left(sin\frac{\pi}{2}-sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{3}\left(sin^3\frac{\pi}{2}-sin^3\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right)=\frac{128}{3}\left(2-\frac{2}{3}\right)=\frac{512}{3}.$$

Відповідь: $\frac{512}{3}$ куб. од.

Приклад 10. Знайти координати центра мас однорідної плоскої фігури, обмеженої лініями $y=cos2x$, $y=0$ $\left(-\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}\right)$.

Розв'язок. Нехай точка $C(\overline{x},\overline{y})$ − центр мас (центр ваги) заданої плоскої пластинки D масою m з поверхневою густиною розподілу маси $\mu(x,y)$. Координати цієї точки обчислимо за формулами (6.7.1) і (6.7.2):

$$\overline{x}=\frac{M_y}{m}=\frac{\iint\limits_D x\mu(x,y)dxdy}{\iint\limits_D \mu(x,y)dxdy},\qquad \overline{y}=\frac{M_x}{m}=\frac{\iint\limits_D y\mu(x,y)dxdy}{\iint\limits_D \mu(x,y)dxdy}.$$

Оскільки фігура однорідна, то поверхнева густина розподілу маси $\mu(x,y)=\mu$ − стала величина, тобто величину μ можна винести множником за знаки інтегралів і у чисельнику, і у знаменнику та скоротити на неї. Таким чином, для обчислення $\overline{x}$ і $\overline{y}$ отримаємо наступні формули:

$$\overline{x}=\frac{\iint\limits_D xdxdy}{\iint\limits_D dxdy},\qquad \overline{y}=\frac{\iint\limits_D ydxdy}{\iint\limits_D dxdy}.$$

Отже, треба обчислити три інтеграли за областю *D*. Побудуємо фігуру, що обмежена заданими лініями (рис. 26).

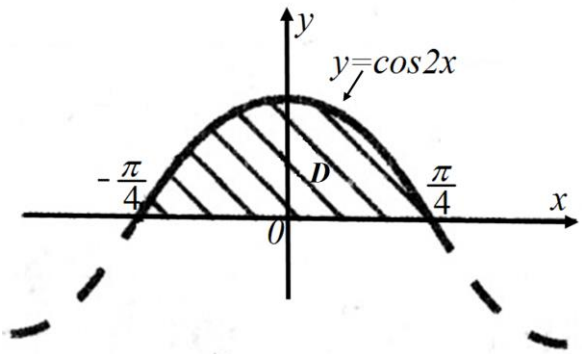


Рис. 26

Область *D* правильна у напрямі осі *Oy*, тому істотно вибрати зовнішній інтеграл за змінною *x*: $-\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}$. Коли змінна *x* приймає значення від $-\frac{\pi}{4}$ до

$\frac{\pi}{4}$, змінна y буде змінюватися від 0 до косинусоїди $y = cos\,2x$: $0 \le y \le cos\,2x$. Тепер обчислимо послідовно всі три інтеграли.

1) $$\iint\limits_D xdxdy = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} dx \int\limits_0^{cos\,2x} xdy = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} xdx \int\limits_0^{cos\,2x} dy = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x\,y\Big|_0^{cos\,2x} dx = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x\,cos\,2xdx =$$

$$= \left\{ \text{інтегруємо частинами: } \begin{array}{c} u = x \;\Rightarrow\; du = dx \\ dv = cos\,2xdx \;\Rightarrow\; v = \frac{1}{2} sin\,2x \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{x\,sin\,2x}{2}\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} sin\,2xdx = \frac{x\,sin\,2x}{2}\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} + \frac{cos\,2x}{4}\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} sin\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} sin\frac{\pi}{2} + 0 - 0 = 0.$$

2) $$\iint\limits_D ydxdy = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} dx \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{cos\,2x} ydy = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{cos\,2x} dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} cos^2\,2xdx =$$

$$= \left\{ \text{понизимо степінь за формулою } cos^2\,2x = \frac{1}{2}\left(1 + cos\,4x\right) \right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + cos\,4x\right)dx = \frac{1}{4}\left(\int\limits_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} dx + \int\limits_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} cos\,4x\,dx \right) = \frac{1}{4}\left(x + \frac{sin\,4x}{4} \right)\Bigg|_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}.$$

3) $$\iint\limits_D dxdy = \int\limits_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} dx \int\limits_0^{cos\,2x} dy = \int\limits_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} y\Big|_0^{cos\,2x} dx = \int\limits_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} cos\,2x\,dx = \frac{sin\,2x}{2}\Bigg|_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(sin\frac{\pi}{2} + sin\frac{\pi}{2} \right) = 1$$

.

Отже, $$\overline{x} = \frac{\iint\limits_D xdxdy}{\iint\limits_D dxdy} = \frac{0}{1} = 0, \qquad \overline{y} = \frac{\iint\limits_D ydxdy}{\iint\limits_D dxdy} = \frac{\pi/8}{1} = \frac{\pi}{8}.$$

Відповідь: центр мас $-C\left(0; \frac{\pi}{8}\right)$.

Зауваження: обчислювати абсцису $\bar{x}$ центра мас заданої фігури не було необхідності, оскільки фігура, що обмежена лініями $y = cos 2x$, $y = 0$, $\left(-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}\right)$, симетрична щодо прямої $x = 0$, і фігура однорідна, тобто $\mu(x,y) = \mu = const$, і тому центр мас обов'язково повинен лежати на цій прямій.

Приклад 11. Знайти моменти інерції відносно осей Ox і Oy однорідної пластинки, обмеженої лініями $x + y = 0$, $x = 1$, $y = 2$.

Розв'язок. Моменти інерції пластинки D масою m з поверхневою густиною розподілу маси $\mu(x,y)$ відносно координатних осей Ox і Oy відповідно обчислимо за формулами (6.6.1) і (6.6.2):

$$I_x = \iint\limits_D y^2 \mu(x,y)\,dxdy, \quad I_y = \iint\limits_D x^2 \mu(x,y)\,dxdy.$$

D − трикутник з вершинами $A(1;-1)$, $B(1;2)$, $C(-2;2)$ (рис. 27).

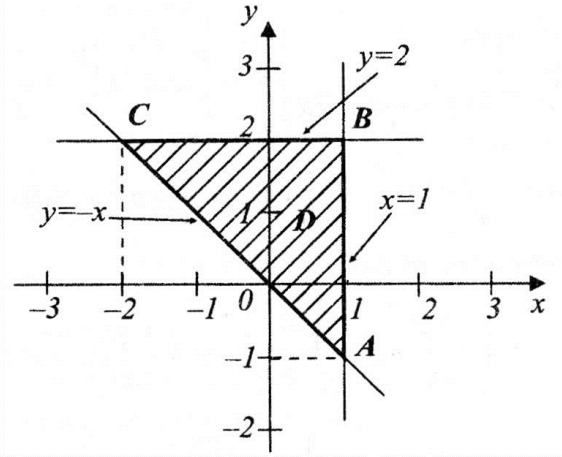


Рис. 27

Область інтегрування D правильна в напрямі обох координатних осей, тому тут зручно зовнішній інтеграл вибирати за будь-якою змінною: x чи y. Нехай змінна зовнішнього інтеграла буде x. Для заданої області D x змінюється від -2 до 1, а y при цьому змінюється від прямої $y = -x$ до прямої $y = 2$. Отже, можемо обчислити моменти інерції, перейшовши від подвійних інтегралів до повторних за областю D. Поверхнева густина розподілу маси $\mu(x,y) = \mu$ − стала, через те що пластинка за умовою однорідна, і, за властивістю подвійного інтеграла, число μ можна винести множником за знак інтеграла.

$$I_x = \iint\limits_D y^2 \mu(x,y)\,dxdy = \mu \int_{-2}^{1} dx \int_{-x}^{2} y^2 dy = \mu \int_{-2}^{1} \left.\frac{y^3}{3}\right|_{-x}^{2} dx = \frac{\mu}{3} \int_{-2}^{1} \left(8 - (-x)^3\right) dx =$$

$$= \frac{\mu}{3} \int_{-2}^{1} \left(8 + x^3\right) dx = \frac{\mu}{3} \left.\left(8x + \frac{x^4}{4}\right)\right|_{-2}^{1} = \frac{\mu}{3}\left(8(1+2) + \frac{1^4 - 16}{4}\right) = \frac{81}{12}\mu.$$

$$I_y = \iint\limits_D x^2 \mu(x,y)\,dxdy = \mu \int_{-2}^{1} x^2 dx \int_{-x}^{2} dy = \mu \int_{-2}^{1} \left. x^2 y\right|_{-x}^{2} dx = \mu \int_{-2}^{1} x^2 \left(2 - (-x)\right) dx =$$

$$= \mu \int_{-2}^{1} \left(2x^2 + x^3\right) dx = \mu \left.\left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4\right)\right|_{-2}^{1} = \mu\left(\frac{2}{3}\left(1^3 - (-2)^3\right) + \frac{1}{4}\left(1^4 - (-2)^4\right)\right) =$$

$$=\mu\left(\frac{2}{3}(1+8)+\frac{1}{4}(1-16)\right)=\mu\left(6-\frac{15}{4}\right)=\frac{9}{4}\mu.$$

Відповідь: $I_x=\frac{81}{12}\mu$, $I_y=\frac{9}{4}\mu$.

Приклад 12. Знайти масу плоскої пластинки, обмеженої лініями $x-2=0$, $y-2=0$, $2y-x=0$, якщо її поверхнева густина $\mu(x,y)$ у кожній точці пластинки дорівнює сумі її абсциси і ординати.

Розв'язок. Маса плоскої пластинки з поверхневою густиною розподілу маси $\mu(x,y)$ знаходиться за формулою (6.4) $m=\iint\limits_D \mu(x,y)dxdy$. Область D − трикутник з вершинами $A(2;2)$, $B(4;2)$, $C(2;1)$ (рис. 28).

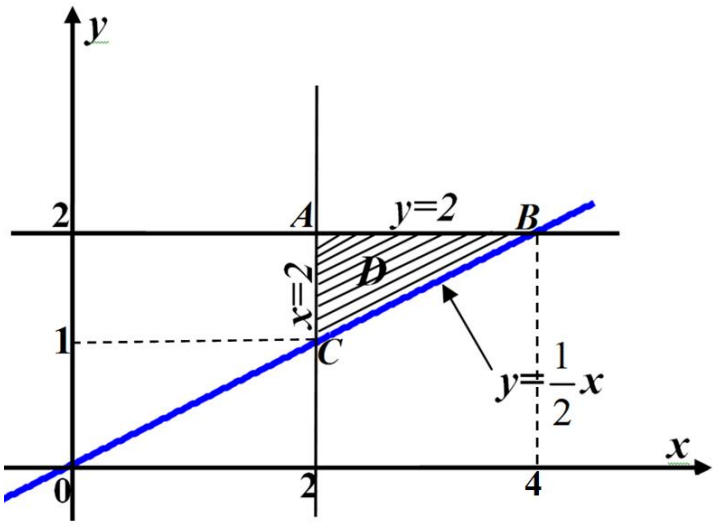


Рис.28

Область D правильна і в напрямі осі Ox, і в напрямі осі Oy. Виберемо x змінною інтегрування зовнішнього інтеграла, а внутрішнього − y. Для області D x змінюється від 2 до 4, а y при цьому змінюється від прямої $y=\frac{1}{2}x$ до прямої $y=2$.

За умовою задачі поверхнева густина $\mu(x,y)$ у кожній точці пластинки дорівнює сумі її абсциси і ординати, тобто $\mu(x,y)=x+y$.

Таким чином,

$$m=\iint\limits_D \mu(x,y)dxdy=\int\limits_2^4 dx\int\limits_{\frac{x}{2}}^2 (x+y)dy=\int\limits_2^4\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{\frac{x}{2}}^2 dx=\int\limits_2^4\left(x\left(2-\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(4-\frac{x^2}{4}\right)\right)dx=$$

$$=\int_2^4\left(2x+2-\frac{5x^2}{8}\right)dx=\left(x^2+2x-\frac{5x^3}{24}\right)\Bigg|_2^4=16+8-\frac{40}{3}-\left(4+4-\frac{5}{3}\right)=\frac{13}{3}.$$

Відповідь: $\frac{13}{3}$ од. маси.

§7. Питання для самоперевірки

1. Яка множина на площині називається обмеженою?

2. Який з наведених кругів $x^2+y^2<4$ і $x^2+y^2\le 9$ є замкненим, а який − відкритим?

3. Що таке δ-окіл точки $\subset$ на площині?

4. Множина D − усі точки, що задовольняють нерівності $x^2+y^2\le 9$. Які з наведених нижче точок є внутрішніми точками множини D?

а) $A(1,3)$, *б*) $B(0,3)$, *в*) $C(1,2)$, *г*) $M\left(2,\sqrt{3}\right)$, *д*) $K(4,0)$.

5. Множина D − усі точки, що задовольняють нерівності $x^2+y^2<4$. Які з наведених нижче точок є межовими точками множини D?

а) $A(1,1)$, *б*) $B(0,2)$, *в*) $C(1,2)$, *г*) $M\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$, *д*) $K(4,0)$.

6. Множина D − усі точки, що задовольняють одночасно двом нерівностям $x^2+y^2<4$ і $y\ge x^2$. Чи є множина D замкненою?

7. D_1 і D_2 − круги на площині xOy з центром у точці $O(0,0)$ і радіусами відповідно $\frac{1}{2}$ і 2. Для якого числа λ виконується рівність $\lambda\iint\limits_{D_1}dxdy=\iint\limits_{D_2}dxdy$?

8. Функції $f(x,y)$ і $g(x,y)$ неперервні в області D. Чи існує подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)\cdot g(x,y)dxdy$?

9. Функції $f(x,y)$ і $g(x,y)$ неперервні в області D, причому $g(x,y)\ge\alpha>0$ $\forall(x,y)\in D$. Чи існує подвійний інтеграл $\iint\limits_D\frac{f(x,y)}{g(x,y)}dxdy$?

10. Функція $f(x,y)$ неперервна в області D. Чи існує подвійний інтеграл $\iint\limits_D\left|f(x,y)\right|dxdy$?

11. Функція $f(x,y)$ неперервна в області D. Область D складається з двох областей D_1 і D_2, множини внутрішніх точок яких не перетинаються, і

площі областей D_1 і D_2 однакові. Чи справедлива рівність $\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$?

12. Функція $f(x,y)$ неперервна в області *D*. Область *D* складається з двох областей D_1 і D_2, множини внутрішніх точок яких не перетинаються, і площі областей D_1 і D_2 однакові. Чи справедлива рівність $2\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$?

13. Функція $f(x,y)$ неперервна і невід'ємна в області *D*, а $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = 0$. Який висновок можна зробити відносно функції $f(x,y)$?

14. Функція $f(x,y)$ неперервна в області *D*, і $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = 7$, $\iint\limits_{D} \left(f(x,y) + 2 \right) dxdy = 25$. Чому дорівнює площа області *D*?

15. Функція $f(x,y)$ неперервна в області *D*, і $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = 7$, $\iint\limits_{D} \left(3f(x,y) + 2 \right) dxdy = 48$. Чому дорівнює площа області *D*?

16. Функції $f(x,y)$ і $g(x,y)$ неперервні в області *D*, і $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = 3$, $\iint\limits_{D} g(x,y)dxdy = 4$. Чому дорівнює $\iint\limits_{D} \left(5f(x,y) - \frac{1}{2} g(x,y) \right) dxdy$?

17. Функція $f(x,y)$ неперервна в області *D*. Площа області *D* дорівнює 3, а $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = 12$. Укажіть таке значення функції $f(x,y)$, яке вона гарантовано приймає в деякій точці області *D*.

18. Які з наведених нижче областей D_1, D_2, D_3, D_4 є правильними в напрямі осі *Ox*?

$$D_1: \begin{cases} y \ge (x-1)^2 \\ y \le 2 \end{cases}, \qquad D_2: \begin{cases} y^2 \le -(x-1) \\ y^2 \le x+1 \end{cases},$$

$$D_3: \begin{cases} y \le 2 + \sin x \\ y \ge 0 \\ 0 \le x \le 2\pi \end{cases}, \qquad D_4: \begin{cases} y \le (x+1)^2 \\ y \le -x^2 \end{cases}.$$

19. Які з наведених нижче областей D_1, D_2, D_3, D_4 є правильними в напрямі осі *Oy*?

$$D_1: \begin{cases} y \le 1 - x^2 \\ y \ge |x| - 1 \end{cases}, \qquad D_2: \begin{cases} y \le x^2 - 1 \\ y \le -x^2 \end{cases},$$

$$D_3: \begin{cases} y \le \ln x \\ y \ge 0 \\ x \le 2 \end{cases}, \qquad D_4: \begin{cases} 0 \le y \le 3 \\ x \ge (y-1)(y-2)(y-3) \\ x \le 2 \end{cases}.$$

20. Який з наведених нижче інтегралів має сенс?

а) $\int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{x^2} f(x,y)dx$, *б)* $\int\limits_{x^2}^0 dy \int\limits_1^2 f(x,y)dx$, *в)* $\int\limits_0^{x^2} dx \int\limits_1^2 f(x,y)dy$,

г) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)dy$, *д)* $\int\limits_0^{x^2} dy \int\limits_1^2 f(x,y)dx$.

21. Для яких функцій $f(x,y)$ і $g(x,y)$ неперервних в області D, що задана нерівностями $a \le x \le b$, $c \le y \le d$, буде справедлива рівність $\iint\limits_D f(x,y) \cdot g(x,y)dxdy = \int\limits_a^b f(x,y)dx \cdot \int\limits_c^d g(x,y)dy$?

а) $f(x,y) = x^2$, $g(x,y) = x + y$, *б)* $f(x,y) = (x-y)^2$, $g(x,y) = 5y$,

в) $f(x,y) = x + 1$, $g(x,y) = (1-y)^2$, *г)* $f(x,y) = \sin(xy)$, $g(x,y) = x^2$.

§8. Завдання для самостійного розв'язування

I. Обчислити подвійний інтеграл:

1. $\iint\limits_D \left(3x\sqrt{y} + 2\right)dxdy$, $D: x = 0;\ y = 2x;\ y = 1$

2. $\iint\limits_D \left(e^{2x-y} + 3y\right)dxdy$, $D: y = 0;\ x = 1;\ x = y$

3. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{4 + x + y}}$, $D:\ y = 0;\ x = 0;\ y + x = 5$

4. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\cos^2(x+y)}$, $D:\ x = \frac{p}{6};\ y = 0;\ y = x$

5. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{sin^2(x+y)}$, $D:\ y=\frac{p}{6};\ x=y;\ x=0$

6. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x+y+1)^2}$, $D:\ x=0;\ y=0;\ x=1;\ y=2$

7. $\iint\limits_D \left(xy^2-e^x\right)dxdy$, $D:\ x=0;\ y=0;\ x=1;\ y=1$

8. $\iint\limits_D ye^{xy}dxdy$, $D:\ x=1;\ x=2;\ y=0;\ y=ln2$

9. $\iint\limits_D \left(x^2y^3+sin\,x\right)dxdy$, $D:\ x=0;\ x=-p;\ y=1;\ y=2$

10. $\iint\limits_D \left(4y^2\sqrt{x}+cos\,y\right)dxdy$, $D:\ x=-1,\ x=1,\ y=-\pi,\ y=\pi$

11. $\iint\limits_D xye^{y^2}dxdy$, $D: x=-1;\ x=1;\ y=-1;\ y=1$

12. $\iint\limits_D cos(2x+3y)sin(4x+5y)dxdy$, $D:\ x=0,\ x=\pi,\ y=0,\ y=\pi$

13. $\iint\limits_D (x+y)^3dxdy$, $D:\ x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=2$

14. $\iint\limits_D cos(x-y)cos(2x+3y)dxdy$, $D:\ x=0,\ x=\frac{\pi}{2},\ y=0,\ y=\pi$

15. $\iint\limits_D (2x+y+1)^4dxdy$, $D:\ x=0,\ x=\frac{1}{2},\ y=0,\ y=1$

16. $\iint\limits_D cos(x+y)dxdy$, $D:\ y=0,\ y=x,\ x=\pi$

17. $\iint\limits_D \sqrt{1+x+y}dxdy$, $D:\ x=0,\ y=0,\ y=3-x$

18. $\iint\limits_D sin(x+y)sin(x-y)dxdy$, $D:\ y=0,\ y=\pi,\ x=0,\ x=\pi$

19. $\iint\limits_D (\sin x + \cos y)\,dxdy$, D: $x=0,\ x=\frac{\pi}{2},\ y=0,\ y=\pi$

20. $\iint\limits_D (x+3y-1)^5\,dxdy$, D: $x=0,\ y=0,\ y+x=1$

21. $\iint\limits_D \left(2\sqrt[3]{y}x^2 - \sin x\right)dxdy$, D: $x=-\pi,\ x=\pi,\ y=0,\ y=1$

22. $\iint\limits_D \frac{\cos x - 3y}{y+1}\,dxdy$, D: $x=0,\ x=\pi,\ y=0,\ y=1$

23. $\iint\limits_D \cos(x+y)\cos^2 y\,dxdy$, D: $x=0,\ x=y,\ y=\pi$

24. $\iint\limits_D \frac{x-3y}{9+x^2}\,dxdy$, D: $x=0,\ x=3,\ y=0,\ y=1$

25. $\iint\limits_D \frac{5^x}{16+y^2}\,dxdy$, D: $x=0,\ y=1,\ y=0,\ y=4$

II. Змінити порядок інтегрування:

1. $\int\limits_1^e dx \int\limits_{\ln x}^1 f(x,y)\,dy$.

2. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 dy \int\limits_{\log_2 y}^0 f(x,y)\,dx$.

3. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\arcsin y} f(x,y)\,dx$.

4. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\arccos y}^{\frac{\pi}{2}} f(x,y)\,dx$.

5. $\int\limits_1^e dy \int\limits_{\ln y}^1 f(x,y)\,dx$.

6. $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{1-\sqrt{2y-y^2}}^1 f(x,y)\,dx$.

7. $\int\limits_{-2}^2 dy \int\limits_{y^2-1}^3 f(x,y)\,dx$.

8. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{e^x}^e f(x,y)\,dy$.

9. $\int\limits_{-2}^0 dy \int\limits_1^{1+\sqrt{-y^2-2y}} f(x,y)\,dx$.

10. $\int\limits_{-4}^{-1} dx \int\limits_1^{-\frac{4}{x}} f(x,y)\,dy$.

11. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} f(x,y)dy$.

12. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$.

13. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{x} f(x,y)dy$.

14. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{e^y}^{e} f(x,y)dx$.

15. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx$.

16. $\int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$.

17. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$.

18. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{2-x}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$.

19. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y}}^{y-1} f(x,y)dx$.

20. $\int\limits_{1}^{4} dy \int\limits_{1}^{\frac{4}{x}} f(x,y)dx$.

21. $\int\limits_{-2}^{2} dy \int\limits_{-3}^{1-y^2} f(x,y)dx$.

22. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{1}^{2^x} f(x,y)dy$.

23. $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-y}^{\sqrt{-y}} f(x,y)dx$.

24. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_{0}^{\cos x} f(x,y)dy$.

25. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_{0}^{\sin x} f(x,y)dy$.

III. Змінивши порядок інтегрування, записати даний вираз у вигляді одного повторного інтеграла:

1. $\int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{1}^{y} f(x,y)dx + \int\limits_{2}^{3} dy \int\limits_{1}^{4-y} f(x,y)dx$

2. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x}} f(x,y)dy$

3. $\int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{0}^{\frac{y}{2}} f(x,y)dx + \int\limits_{4}^{6} dy \int\limits_{0}^{6-y} f(x,y)dx$

4. $\int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{-1}^{\sqrt{3-x}} f(x,y)dy + \int\limits_{2}^{3} dx \int\limits_{-\sqrt{3-x}}^{\sqrt{3-x}} f(x,y)dy$

5. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x} f(x,y)dy + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{0}^{2-x} f(x,y)dy$

6. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{y} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx$

7. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} dx \int\limits_{\frac{1}{x}}^{2} f(x,y)dy + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{x}^{2} f(x,y)dy$

8. $\int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{-x^2-2x}} f(x,y)dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{-x} f(x,y)dy$

9. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} dy \int\limits_{\frac{1}{y}}^{2} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{1}^{2} f(x,y)dx$

10. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\arcsin y} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{\frac{\pi(2-y)}{2}} f(x,y)dx$

11. $\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx+\int_1^e dy\int_{\ln y}^1 f(x,y)dx$

12. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} dx\int_0^{\frac{3x}{2\pi}} f(x,y)dy+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} dx\int_0^{\cos x} f(x,y)dy$

13. $\int_1^2 dy\int_1^y f(x,y)dx+\int_2^4 dy\int_{\frac{y}{2}}^2 f(x,y)dx$

14. $\int_{-2}^{-1} dx\int_0^{x+2} f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_0^{\sqrt{-x}} f(x,y)dy$

15. $\int_0^2 dx\int_1^3 f(x,y)dy+\int_2^6 dx\int_{\frac{x}{2}}^3 f(x,y)dy$

16. $\int_{-1}^0 dx\int_0^{2x+2} f(x,y)dy+\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$

17. $\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy+\int_e^5 dx\int_0^{\frac{e}{x}} f(x,y)dy$

18. $\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy+\int_1^4 dx\int_{-\sqrt{x}}^1 f(x,y)dy$

19. $\int_{-2}^0 dx\int_{\frac{x}{2}}^1 f(x,y)dy+\int_0^1 dx\int_{x^3}^1 f(x,y)dy$

20. $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx$

21. $\int_{-2}^{-1} dy\int_{-2}^{-1} f(x,y)dx+\int_{-1}^0 dy\int_{y-1}^{-1} f(x,y)dx$

22. $\int_{-1}^0 dx\int_0^{x+1} f(x,y)dy+\int_0^1 dx\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^1 f(x,y)dy$

23. $\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy+\int_1^e dx\int_{\ln x}^1 f(x,y)dy$

24. $\int_0^{\frac{1}{2}} dy\int_{-1}^1 f(x,y)dx+\int_{\frac{1}{2}}^2 dy\int_{\log_2 y}^1 f(x,y)dx$

25. $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy+\int_1^3 dx\int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x,y)dy$

IV. Обчислити площу фігури, обмеженої даними лініями:

1. $y=3-\frac{3}{4}x^2,\quad y+\frac{3}{2}x=3.$

2. $x+y=2,\quad y=x^2-4x+2.$

3. $x=-y^2-2y,\quad y=2x+3.$

4. $3y=5-x,\quad x+3y^2-6y+1=0.$

5. $x+y=3,\quad y^2=x+3.$

6. $y=x+2,\quad x+y^2=4.$

7. $4y=8x-x^2,\quad 4y=x+6.$

8. $4x=y+2,\quad x+\frac{1}{4}y^2=2.$

9. $y+3=\frac{1}{2}x^2,\quad 2y=x.$

10. $y+x^2=4x-2,\quad x+y=2.$

11. $x+y=5,\quad x-1=(y-2)^2.$

12. $y=-3x^2+3,\quad y+3x=3.$

13. $y=x-1,\quad x=y^2+1.$

14. $x=y,\quad y=2-x^2.$

15. $x+y=0,\quad x+y^2=2.$

16. $y+2=x^2,\quad x+y=0.$

17. $y-x+2=0,\quad x+y^2=4.$

18. $y=1-2x^2,\quad y+2x+3=0.$

19. $2y=x+1,\quad x+2y^2=3.$

20. $2y+x=0,\quad x+4=2y^2.$

21. $4y + x = 6, \quad 4y = x^2$.

22. $x = 4 + y, \quad 2x = y^2$.

23. $y = x + 3, \quad 2x = y^2 - 2y - 3$.

24. $y + \frac{1}{3}x = 1, \quad x = 3(y - 1)^2$.

25. $y = 2 - \frac{1}{2}x^2, \quad y + 2 = x$.

V. Обчислити площу фігури, утвореної перетином даних множин (доцільно перейти до полярної системи координат):

1. $x^2 + y^2 + 2x \le 0, \quad x^2 + y^2 + 2y \le 0$.

2. $x^2 + y^2 \le 4, \quad x + y \ge 2, \quad y \ge 1$.

3. $x^2 + y^2 \le 2(x + y), \quad x^2 + y^2 \ge 4$.

4. $x^2 + y^2 \le 4, \quad x^2 + y^2 \ge 2(x + y)$.

5. $x^2 + y^2 \le 2y, \quad y \le x$.

6. $x^2 + y^2 \le -4x, \quad y + x \ge 0$.

7. $x^2 + y^2 \le 2x, \quad x^2 + y^2 \le 2, \quad x \ge 0$.

8. $x^2 + y^2 + 4y \ge 0, \quad x^2 + y^2 \le 8, \quad y \le 0$.

9. $x^2 + y^2 \le 4, \quad y \ge \sqrt{3}$.

10. $x^2 + y^2 \le 1, \quad x \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

11. $(x - 1)^2 + y^2 \le 1, \quad x^2 + (y - 1)^2 \le 1$.

12. $x^2 + y^2 \le 6y, \quad x \le \sqrt{3}y, \quad x \ge 0$.

13. $x^2 + y^2 + 4x$ J $0, \quad y + \frac{x}{\sqrt{3}}$ i 0.

14. $x^2 + y^2 \le 9, \quad x^2 + y^2 \ge 6y, \quad y \ge 0$.

15. $x^2 + y^2 \le 25, \quad x^2 + y^2 \le 10x, \quad y \ge 0$.

16. $x^2 + y^2 \le 16, \quad x \ge 2$.

17. $x^2 + y^2 \le 64, \quad x \le -4$.

18. $x^2 + y^2 \le 4, \quad x \ge \sqrt{3}y, \quad y \ge 0$

19. $x^2 + y^2 \le 4, \quad y \ge 2 - x$.

20. $x^2 + y^2 \le 6x, \quad y \ge \sqrt{x + 4}$.

21. $x^2 + y^2 \le 4, \quad x^2 \ge 3y, \quad y \ge 0$.

22. $x^2 + y^2 \le 16, \quad y^2 \ge 6x, \quad x \ge 0$.

23. $x^2 + y^2 \le 36, \quad x^2 \ge -9y, \quad x \ge 0$.

24. $x^2 + y^2 \le 4, \quad y + \sqrt{3x} \ge 0, \quad x \le 0$.

25. $x^2 + y^2 \le 6x, \quad y \le \sqrt{3}x, \quad y \ge 0$.

VI. Знайти об'єм циліндричного тіла, обмеженого даними поверхнями:

1. $y=6\sqrt{3x}, \quad y=\sqrt{3x}, \quad z=0, \quad x+y=3.$

2. $z=9-x^2-y^2, \quad x^2+y^2=1, \quad z=0,$ зовні циліндра для $x>0.$

3. $x+y=2, \quad x=\sqrt{y}, \quad z=\frac{12}{5}x, \quad z=0.$

4. $x^2+y^2=4x, \quad z=12-y^2, \quad z=0.$

5. $x=20\sqrt{2y}, \quad x=5\sqrt{2y}, \quad z=0, \quad z+y=\frac{1}{2}.$

6. $x^2+y^2=\sqrt{128}\,x, \quad z=x^2+y^2-64, \quad z\geq 0.$

7. $x+y=8, \quad y=2\sqrt{x}, \quad z=3y, \quad z=0.$

8. $x^2+y^2=4y, \quad z=6-x^2, \quad z=0.$

9. $x=15\sqrt{y}, \quad x=15y, \quad z=0, \quad z=15+15\sqrt{y}.$

10. $x^2+y^2=y, \quad x^2+y^2=4y, \quad z=\sqrt{x^2+y^2}, \quad z=0.$

11. $z=9-x^2-y^2, \quad x^2+y^2=1, \quad z=0,$ всередині циліндра для $x>0.$

12. $z=4, \quad z=x^2+y^2, \quad z=0.$

13. $x^2+y^2=9, \quad -z=x^2+y^2+1, \quad z=0.$

14. $x+y=3, \quad y=\sqrt{\frac{x}{2}}, \quad z=4x, \quad z=0.$

15. $x^2+y^2=9, \quad z=x^2+y^2+5, \quad z=0.$

16. $x+y=4, \quad x=0, \quad x=2, \quad y=0, \quad z=0, \quad z=2+x^2+y^2.$

17. $x^2+y^2=2y, \quad z=\frac{9}{4}-x^2, \quad z=0.$

18. $x+y=4, \quad y=\sqrt{2x}, \quad z=3y, \quad z=0.$

19. $z=4-x^2-y^2, \quad x^2+y^2=1, \quad z=0,$ зовні циліндра для $y<0.$

20. $x+y=2, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0, \quad z=3+x^2+y^2.$

21. $z=4-x^2-y^2, \quad z=0.$

22. $x+y=4, \quad x=0, \quad y=0, \quad y=1, \quad z=0, \quad z=3+x^2+y^2.$

23. $z=16-x^2-y^2, \quad x^2+y^2=4, \quad z=0,$ всередині циліндра для $y>0.$

24. $x+y=2, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=1, \quad z=4+x^2+y^2.$

25. $x^2+y^2=4, \quad z=x^2+y^2+2, \quad z=0.$

VII. Знайти координати центра мас однорідної пластинки, обмеженої даними лініями $(\mu(x,y)=\mu=const)$:

1. $y=x, \quad x=\sqrt{2-y}, \quad x=0.$

2. $x=1, \quad x=2, \quad y=2x, \quad y=x.$

3. $x=3-2y,\ \ y=x^2,\ \ y=0.$

4. $y=x,\ \ y=x^3,\ \ (x\geq 0).$

5. $x=\sqrt{y},\ \ x+y=2,\ \ x=0.$

6. $y=x^3,\ \ y=0,\ \ x=1.$

7. $y=x^3,\ \ x=\sqrt{2-y},\ \ x=0.$

8. $2y=x+2,\ \ 3y=x+2,\ \ y=1,\ \ \ y=2.$

9. $y=\sqrt{x},\ \ x=4,\ \ y=1.$

10. $x=-\sqrt{y},\ \ x+y=2,\ \ x=0.$

11. $y=ln\,x,\ \ y=0,\ \ y=1,\ \ \ x=0.$

12. $y=\dfrac{4}{x},\ \ x=2,\ \ \ x=4,\ \ \ y=0.$

13. $y=sin\,x,\ \ y=1,\ \ x=0,\ (x\geq 0).$

14. $y=\dfrac{1}{x},\ \ y=1,\ \ y=2,\ \ \ x=0.$

15. $y=x^3,\ \ y=2-x,\ \ y=0.$

16. $y=x,\ \ x=-\sqrt{2-y},\ \ x=0.$

17. $y=\sqrt{4-x^2},\ \ x+y=2,\ \ y=0.$

18. $y=e^x,\ \ y=e,\ \ x=0.$

19. $y=\sqrt{4-x^2},\ \ x+y=2.$

20. $y=x,\ \ y=x^2.$

21. $y=e^x,\ \ x=1,\ \ y=1.$

22. $y=\sqrt{x},\ \ x=9,\ \ y=0,\ \ y=1.$

23. $y=ln\,x,\ \ x=e,\ \ y=0.$

24. $y=sin\,x,\ \ x=0,\ \ x=\dfrac{\pi}{2},\ \ y=0.$

25. $y=cos\,x,\ \ y=0,\ \ x=0,\ \ x=\pi.$

VIII. Розв’язати задачу

1. Знайти моменти інерції відносно осей Ox і Oy плоскої пластинки, обмеженої лініями $x=-1,\ \ y=3,\ \ y=-2x-1$, якщо її поверхнева густина $\mu(x,y)$ у кожній точці пластинки дорівнює ординаті цієї точки.

2. Знайти моменти інерції відносно осей Ox і Oy плоскої пластинки, обмеженої лініями $x=1,\ y=2,\ x=y$, якщо її поверхнева густина $\mu(x,y)$ у кожній точці пластинки дорівнює квадрату ординати цієї точки.

3. Знайти моменти інерції відносно осей Ox і Oy плоскої пластинки, обмеженої лініями $x=2,\ y=-1,\ y=-2x+1$, якщо її поверхнева густина $\mu(x,y)$ у кожній точці пластинки дорівнює добутку абсциси і квадрата ординати цієї точки.

4. Знайти моменти інерції відносно осей Ox і Oy плоскої пластинки, обмеженої лініями $x=2,\ x=4,\ y=1,\ y=\frac{1}{2}x+1$, якщо її поверхнева густина $\mu(x,y)$ у кожній точці пластинки дорівнює квадрату абсциси цієї точки.

5. Знайти моменти інерції відносно осей Ox і Oy плоскої пластинки, обмеженої лініями $x=1,\ y=-2,\ 2y+x+1=0$, якщо її поверхнева густина $\mu(x,y)$ у кожній точці пластинки дорівнює абсцисі цієї точки.

6. Знайти статичні моменти відносно осей Ox і Oy плоскої пластинки, обмеженої лініями $x=-1,\ y=-2,\ y=x$, якщо її поверхнева густина $\mu(x,y)$ у кожній точці пластинки дорівнює відношенню її абсциси до її ординати.

7. Знайти моменти інерції відносно осей Ox і Oy плоскої пластинки, обмеженої лініями $x=-2,\ x=-1,\ y+x=4,\ y=1$, якщо її поверхнева густина $\mu(x,y)$ у кожній точці пластинки дорівнює подвоєній ординаті цієї точки.

8. Знайти моменти інерції відносно осей Ox і Oy плоскої пластинки, обмеженої лініями $x=-1,\ y=x+4,\ y=1$, якщо її поверхнева густина $\mu(x,y)$ у кожній точці пластинки дорівнює потроєному квадрату ординати цієї точки.

9. Знайти моменти інерції відносно осей Ox і Oy плоскої пластинки, обмеженої лініями $x=-3,\ x=-1,\ y=3,\ y=\frac{2}{3}x+3$, якщо її поверхнева густина $\mu(x,y)$ у кожній точці пластинки дорівнює подвоєному добутку абсциси і ординати цієї точки.

10. Знайти моменти інерції відносно осей Ox і Oy плоскої пластинки, обмеженої лініями $x=-2,\ y=1,\ y=2,\ y=2x+3$, якщо її поверхнева густина $\mu(x,y)$ у кожній точці пластинки дорівнює добутку її ординати на квадрат її абсциси.

11. Знайти моменти інерції відносно осей Ox і Oy плоскої пластинки, обмеженої лініями $x+3=0,\ y-1=0,\ y-2=0,\ y=-2x$, якщо її поверхнева густина $\mu(x,y)$ у кожній точці пластинки дорівнює квадрату відстані від початку координат до цієї точки.

12. Знайти статичні моменти відносно осей Ox і Oy плоскої пластинки, обмеженої лініями $x+1=0,\ y+1=0,\ 2y+x+5=0$, якщо її поверхнева густина $\mu(x,y)$ у кожній точці пластинки дорівнює відношенню її ординати до її абсциси.

13. Знайти моменти інерції відносно осей Ox і Oy плоскої пластинки, обмеженої лініями $x=4,\ y=-3,\ y+x=2$, якщо її поверхнева густина $\mu(x,y)$ у кожній точці пластинки дорівнює абсцисі цієї точки.

14. Знайти моменти інерції відносно осей Ox і Oy плоскої пластинки, обмеженої лініями $x=2,\ y-2=0,\ 2y=x$, якщо її поверхнева густина $\mu(x,y)$ у кожній точці пластинки дорівнює квадрату ординати цієї точки.

15. Знайти моменти інерції відносно осей Ox і Oy плоскої пластинки, обмеженої лініями $x+2=0,\ x+1=0,\ y+2x=0,\ y+2=0$, якщо її поверхнева густина $\mu(x,y)$ у кожній точці пластинки дорівнює добутку абсциси і подвоєної ординати цієї точки.

16. Знайти статичні моменти відносно осей Ox і Oy плоскої пластинки, обмеженої лініями $y+x+3=0$, $x+2=0$, $x+1=0$, $y+3=0$, якщо її поверхнева густина $\mu(x,y)$ у кожній точці пластинки дорівнює квадрату абсциси цієї точки.

17. Знайти моменти інерції відносно початку координат плоскої пластинки, обмеженої лініями $y+x-3=0$, $x-1=0$, $x-2=0$, $y-4=0$, якщо її поверхнева густина $\mu(x,y)$ у кожній точці пластинки дорівнює абсцисі цієї точки.

18. Знайти статичні моменти відносно осей Ox і Oy плоскої пластинки, обмеженої лініями $x=-2,\ y=1,\ y=-x$, якщо її поверхнева густина $\mu(x,y)$ у кожній точці пластинки дорівнює відношенню квадрата її абсциси до її ординати.

19. Знайти статичні моменти відносно осей Ox і Oy плоскої пластинки, обмеженої лініями $x=1\ x=2,\ y-3x-1=0,\ y=2$, якщо її поверхнева густина $\mu(x,y)$ у кожній точці пластинки дорівнює подвоєній ординаті цієї точки.

20. Знайти моменти інерції відносно початку координат плоскої пластинки, обмеженої лініями $x=1,\ x=2,\ y=x+4,\ y=2$, якщо її

поверхнева густина $\mu(x,y)$ у кожній точці пластинки дорівнює потроєному квадрату ординати цієї точки.

21. Знайти статичні моменти відносно осей Ox і Oy плоскої пластинки, обмеженої лініями $x=1,\ x=2,\ y=2,\ y=2x+3$, якщо її поверхнева густина $\mu(x,y)$ у кожній точці пластинки дорівнює подвоєному добутку її абсциси і квадрата її ординати.

22. Знайти моменти інерції відносно осей Ox і Oy плоскої пластинки, обмеженої лініями $x=2,\ x=3,\ y=2,\ y-3x-2=0$, якщо її поверхнева густина $\mu(x,y)$ у кожній точці пластинки дорівнює добутку її ординати на подвоєний квадрат її абсциси.

23. Знайти моменти інерції відносно осей Ox і Oy плоскої пластинки, обмеженої лініями $x-3=0,\ y-1=0,\ y-2=0,\ 2x-y=0$, якщо її поверхнева густина $\mu(x,y)$ у кожній точці пластинки дорівнює подвоєному квадрату відстані від початку координат до цієї точки.

24. Знайти статичні моменти відносно осей Ox і Oy плоскої пластинки, обмеженої лініями $x-1=0,\ x-2=0,\ y-3=0,\ 2y-x=0$, якщо її поверхнева густина $\mu(x,y)$ у кожній точці пластинки дорівнює відношенню її ординати до куба її абсциси.

25. Знайти моменти інерції відносно початку координат плоскої пластинки, обмеженої лініями $x=-5,\ y=2,\ y=4,\ y=x+6$, якщо її поверхнева густина $\mu(x,y)$ у кожній точці пластинки дорівнює добутку ординати цієї точки на квадрат її абсциси.

ДОДАТОК 1 ОСНОВНІ ВИДИ ПОВЕРХОНЬ*

ПЛОЩИНА

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$$

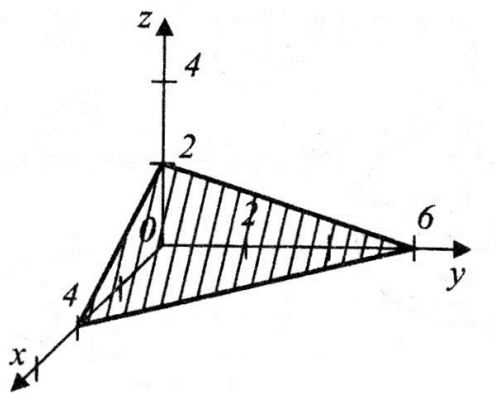
Для побудови площини зручно знайти точки перетину площини з осями координат. Наприклад:

$$3x + 2y + 6z - 12 = 0$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ 3x = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 6z = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ 2y = 12 \end{cases}$$

$$x = 4 \qquad z = 2 \qquad y = 6$$

Площина проходить через точки $(4,0,0)$, $(0,2,0)$ і $(0,0,6)$.



<u>Особливі випадки:</u>

$A = 0 \Rightarrow$ площина $By + Cz + D = 0$ пара

$B = 0 \Rightarrow$ площина $Ax + Cz + D = 0$ паралельна осі Oy

$C = 0 \Rightarrow$ площина $Ax + By + D = 0$ паралельна осі Oz

Якщо $D = 0$, площина проходить крізь відповідну вісь

$A = B = 0 \Rightarrow$ площина $z = -\dfrac{D}{C}$ паралельна площині xOy

$B = C = 0 \Rightarrow$ площина $z = -\dfrac{D}{A}$ паралельна площині yOz

$A = C = 0 \Rightarrow$ площина $z = -\dfrac{D}{B}$ паралельна площині xOz

$D \neq 0$

<u>Рівняння координатних площин:</u>

$x = 0$ – площина yOz,

$y = 0$ – площина xOz,

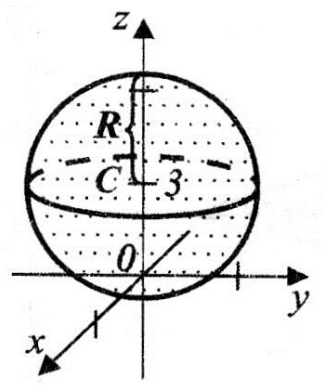
$z = 0$ – площина xOy.

*Додаток 1 розроблено Кармановим В.Є.

С Ф Е Р А

Центр у точці $C(x_0, y_0, z_0)$, радіус R: $\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2}$

Центр у точці $O(0,0,0)$, радіус R: $\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = R^2}$



Приклад. $x^2 + y^2 + z^2 - 6z - 7 = 0$

Виділимо повний квадрат за змінною z:

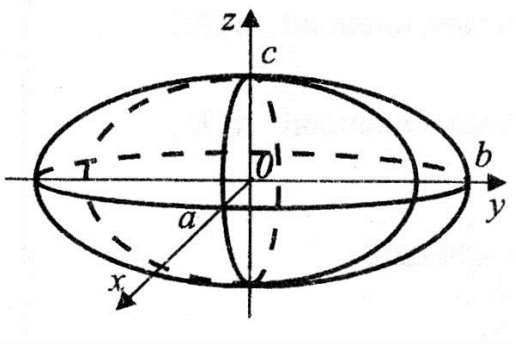
$$x^2 + y^2 + \underbrace{z^2 - 6z + 9}_{(z-3)^2} - 7 = 0$$

$$x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 16$$

$$C(0,0,3), \quad R = 4$$

Е Л І П С О Ї Д

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1}$$



Якщо $a = b = c = R$, маємо сферу $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

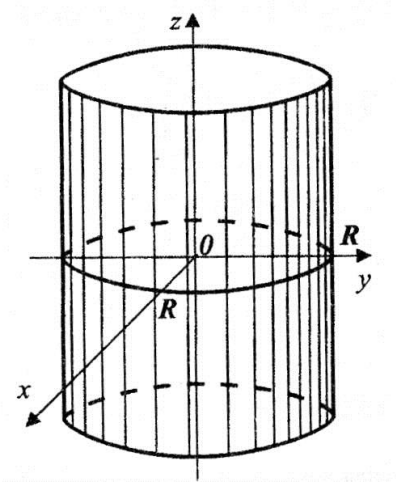
Ц И Л І Н Д Р

Рівняння напрямної лінії циліндричної поверхні

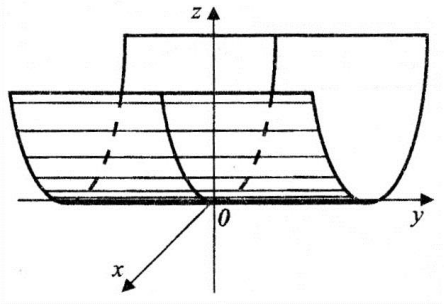
$$\begin{cases} F(x,y)=0 & \text{– циліндрична поверхня з твірними, паралельними осі } Oz; \\ F(x,z)=0 & \text{– циліндрична поверхня з твірними, паралельними осі } Oy; \\ F(z,y)=0 & \text{– циліндрична поверхня з твірними, паралельними осі } Ox. \end{cases}$$

Приклади.

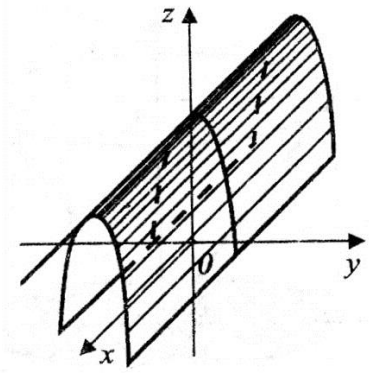
Коловий циліндр $x^2+y^2=R^2$



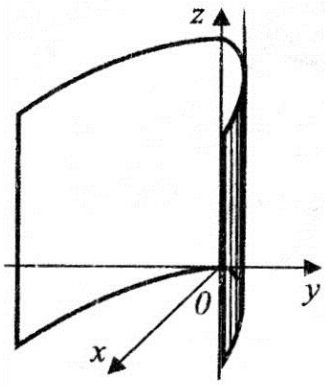
Параболоїдні циліндри



$z=x^2$



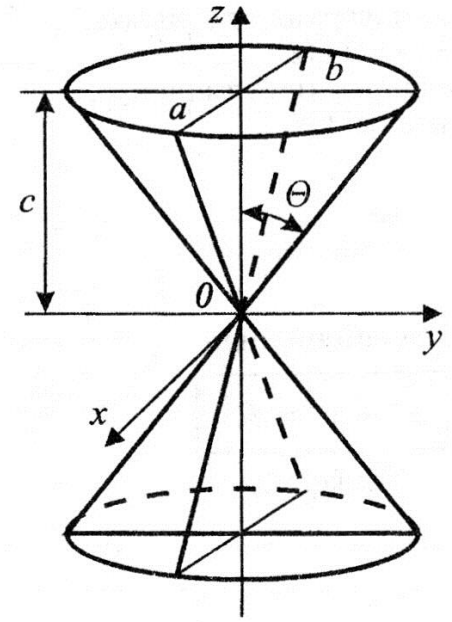
$z=1-y^2$



$y^2=x$

К О Н У С

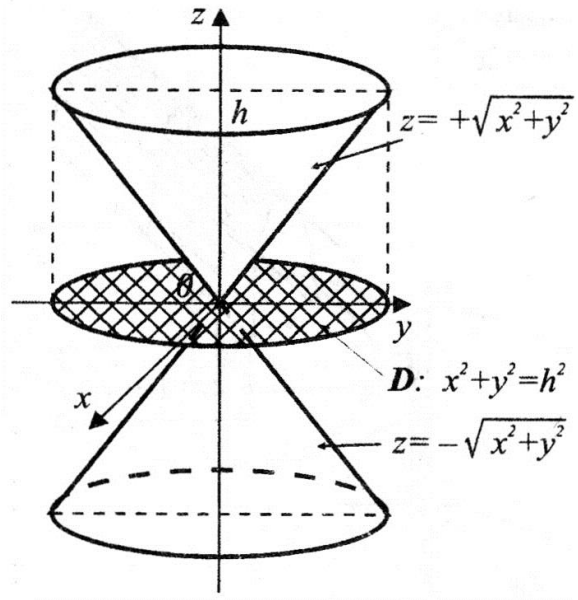
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$$



При $a=b$ – конус коловий

$$tg\theta=\frac{b}{c}$$

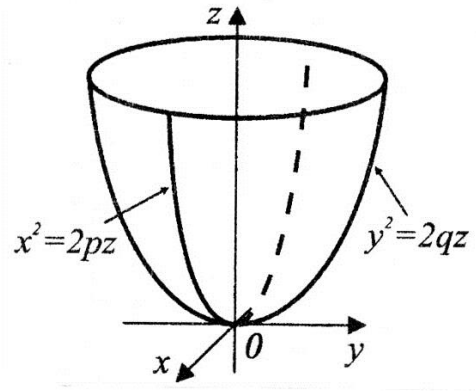
Частіше за все в задачах зустрічається рівняння колового конуса $x^2+y^2=z^2$ ($\theta=45^\circ$):



П А Р А Б О Л О Ї Д

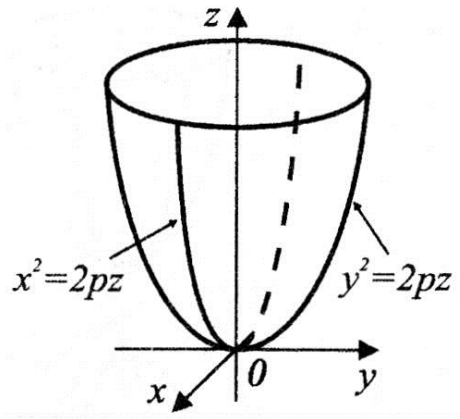
ЕЛІПТИЧНИЙ ПАРАБОЛОЇД

$$2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}$$



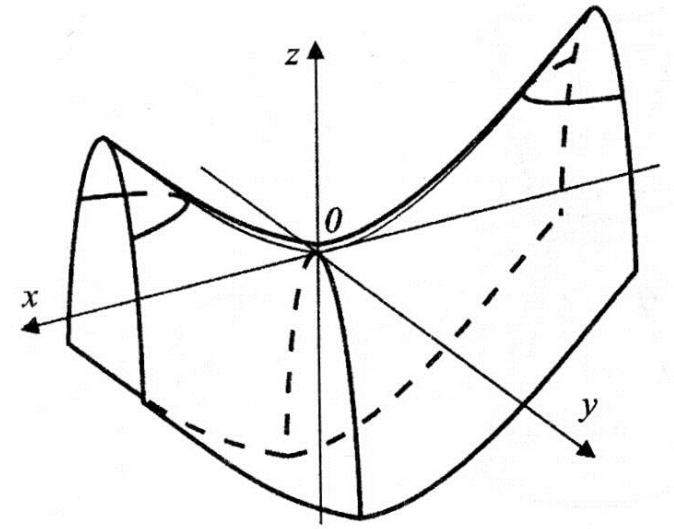
ПАРАБОЛОЇД ОБЕРТАННЯ

$$x^2 + y^2 = 2pz$$



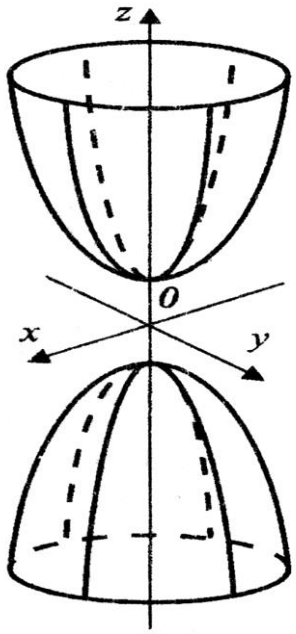
ГІПЕРБОЛІЧНИЙ ПАРАБОЛОЇД

$$2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q}$$

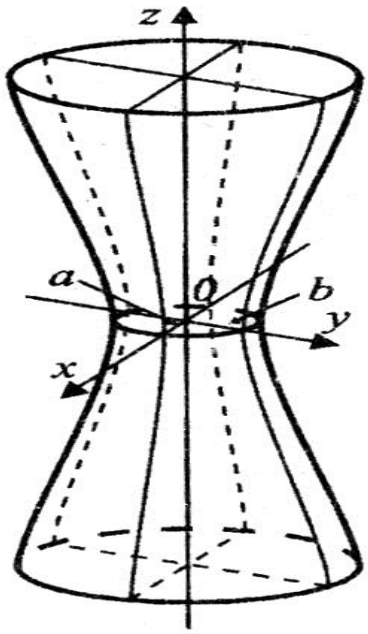


Г І П Е Р Б О Л О Ї Д

ДВОПОЛИЙ ГІПЕРБОЛОЇД $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1}$



ОДНОПОЛИЙ ГІПЕРБОЛОЇД $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1}$



Д О Д А Т О К 2

ТАБЛИЦЯ НЕВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ ВІД ОСНОВНИХ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ

u= u(x) – довільна функція, яка має у деякій області *D* неперервну похідну *u'(x).* Тоді в цій області справедливі наступні формули:

1. $\int 0du = C$	2. $\int du = u + C$
3. $\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, де $\alpha \in R$ и $\alpha \neq -1$.	4. $\int \frac{du}{u} = ln\,\lvert u \rvert + C$
5. $\int a^u du = \frac{a^u}{ln\,a} + C$	6. $\int e^u du = e^u + C$
7. $\int cosu\,du = sinu + C$	8. $\int sinu\,du = -cosu + C$
9. $\int \frac{du}{cos^2 u} = tg\,u + C$	10. $\int \frac{du}{sin^2 u} = -ctg\,u + C$
11. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = arcsin\frac{u}{a} + C = -arccos\frac{u}{a} + C$	12. $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = arcsinu + C = -arccosu + C$
13. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{u}{a} + C = \frac{-1}{a} arcctg\frac{u}{a} + C$	14. $\int \frac{du}{u^2 + 1} = arctg\,u + C = -arcctg\,u + C$
15. $\int \frac{du}{sinu} = ln\left\lvert tg\frac{u}{2} \right\rvert + C$	16. $\int \frac{du}{cosu} = ln\left\lvert tg\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right\rvert + C$
17. $\int tg\,u\,du = -ln\lvert cosu \rvert + C$	18. $\int ctg\,u\,du = ln\lvert sinu \rvert + C$
19. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} ln\left\lvert \frac{u-a}{u+a} \right\rvert + C$	20. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} ln\left\lvert \frac{u+a}{u-a} \right\rvert + C$
21. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right\rvert + C$	22. $\int \frac{udu}{\sqrt{a^2 \pm u^2}} = \pm\sqrt{a^2 \pm u^2} + C$

ОЗНАЧЕННЯ. Сукупність усіх первісних для функції $f(x)$, $x \in [a;b]$, називається ***невизначеним інтегралом*** функції $f(x)$ на $[a;b]$ і позначається $\int f(x)dx$.

Властивості невизначеного інтеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$
3. $\int d\left(F(x)\right) = F(x) + C$
4. Якщо $a \neq 0$ – стала, то $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$
5. $\int f(x)dx \pm \int g(x)dx = \int\left(f(x) \pm g(x)\right)dx$.
   Ця властивість справедлива для будь-якого ***скінченого*** числа доданків.
6. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$ і $u = \varphi(x)$ – довільна функція, яка має неперервну похідну, то $\int f\left(\varphi(x)\right)d\varphi(x) = F\left(\varphi(x)\right) + C$, або: $\int f(u)du = F(u) + C$.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Дубовик В.П. Вища математика : навч. посіб. для студ. вищ. навч. зак. / В.П Дубовик., ІІ. Юрик. - Київ : Ігнатекс-Україна., 2013. - 648 с.
2. Є.С. Сінайський, Л.В. Новікова, Л.І. Заславська Вища математика Дніпропетровськ. НГУ. 2004 (частина 1).
3. Вища математика. Розв'язання задач та варіанти типових розрахунків. Т.1.: Навч. Посібник / За ред. Л.В.Курпа. — Харків: НТУ "ХПІ", 2002 – 316с.